

بررسی عددی جریان سیال و انتقال حرارت سه بعدی در ناحیه ورودی یک ریزمجرای مستطیلی تحت شرط مرزی شار ثابت نوع H2

حمید نیازمند

دانشیار

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

P.O.B. ۹۱۷۷۵ - ۱۱۱۱

علی امیری جاغرق

دانشجوی کارشناسی ارشد

دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

چکیده: در مقاله حاضر انتقال حرارت سه بعدی در ناحیه ورودی ریزمجراهای مستطیلی بصورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است. دیواره مجرا تحت اثر شرط مرزی شار ثابت نوع H2 (شار ثابت هم در طول و هم در پیرامون مجرا) قرار دارد. معادلات نویر-استوکس از روش حجم محدود به صورت تفاضلی در آمده و در دستگاه مختصات عمومی حل شده است. اثر رقیق شدگی با اعمال شروط لغزش سرعت و پرش دما در رژیم لغزشی در نظر گرفته شده است. میدان سرعت و الگوی گسترش دما در حوزه حل استخراج و ابعاد مختلف آن مورد بحث قرار گرفته است؛ بویژه تغییرات ضریب اصطکاک و عدد نوسلت در مقابل پارامترهای مسئله از قبیل عدد نودسن، عدد رینولدز و هندسه کانال بحث و بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: ریزمجرا، رژیم لغزشی، پرش دمایی، انتقال حرارت سه بعدی، ناحیه ورودی، شرط مرزی شار ثابت نوع H2

۱. مقدمه:

مجراهای با قطر هیدرولیکی کمتر از یک میلی‌متر را در گروه ریزمجراها دسته‌بندی می‌کنند. یکی از مهمترین اثراتی که این دسته از مجراها را متمایز می‌کند، اثر رقیق شدگی^۱ می‌باشد. عدد نودسن، Kn، که بصورت نسبت مسیر پویس آزاد گاز به طول مشخصه ماکروسکوپیکی سیستم تعریف می‌شود، معیاری برای میزان رقیق شدگی می‌باشد. بر این اساس در محدوده $10^{-1} < Kn < 10^{-3}$ در ناحیه نزدیک دیواره، جایی که در یک لایه نازک معروف به لایه نودسن، برخوردهای مولکولی با دیواره بر برخوردهای بین مولکولی غلبه کرده، حالت رقیق شدگی اتفاق می‌افتد و در نتیجه شرط تعادل ترمودینامیکی بر هم می‌خورد، رفتار گاز از فرض پیوستگی منحرف می‌شود. در این بازه از عدد نودسن که به رژیم لغزشی موسوم است، معادلات استاندارد نویر استوکس و انرژی تنها با اعمال شرایط مرزی لغزش سرعت و پرش دما می‌توانند پدیده را با دقت قابل قبولی بیان کنند. اعتبار استفاده از این شرایط در مطالعات وو و لیتل^۲ [۱]، بسکوک و کارنیاداکیس^۳ [۲]، ترنر^۴ و همکاران [۳] و بسیاری مطالعات دیگر مورد تایید قرار گرفته است. بررسی مطالعات انجام شده در زمینه ریزمجراها حاکی از کمبود تحلیل‌های جامع سه بعدی در این زمینه است. بعلاوه اکثر محققین جریان کاملا توسعه یافته را مورد بررسی قرار داده‌اند و اطلاعات اندکی از ناحیه در حال توسعه در دسترس می‌باشد.

¹ Rarefaction effect

² Wu and Little

³ Beskok and Karniadakis

⁴ Turner

در زمینه انتقال حرارت در رژیم لغزشی نیز مطالعات فراوانی انجام پذیرفته است. به عنوان مثال، اینمن^۱ [۴]، کاوهپور و همکاران [۵]، آساکو^۲ [۶] و بسیاری دیگر. اغلب بررسی‌ها در حالت دو بعدی انجام پذیرفته و معمولاً حالت توسعه یافته جریانی و دمایی مورد بحث قرار گرفته است. در حالتی هم که ناحیه در حال توسعه گرمایی مد نظر قرار گرفته، جریان کاملاً توسعه یافته فرض شده است. این در حالی است که در ریزمجراهای کوتاه که امروزه به طور متداول در ریز مبدل‌ها و ریزسیستم‌های مکانیکی-الکترونیکی، MEMS، بکار برده می‌شوند، انتقال حرارت در ناحیه ورودی به علت بالا بودن عدد نوسلت، Nu، از اهمیت بالایی برخوردار است. نکته مهم دیگر آنکه در اغلب تحلیل‌ها از هدایت گرمایی در طول کانال صرف‌نظر شده در حالی که در جریان‌های با عدد پکلت، Pe، پایین که از مشخصه‌های جریان در ریزمجراها است، این اثر نقش عمده و غیر قابل چشم‌پوشی ایفا می‌کند. رنکسزبولوت^۳ و همکاران [۷] به بررسی سه بعدی ناحیه ورودی در یک ریزمجرا با مقطع مستطیلی تحت شرط مرزی گرمایی دما ثابت پرداختند. آنها مقادیر لغزش سرعت و پرش دما را در ناحیه ورودی بزرگ گزارش کرده‌اند. همچنین کاهش اصطکاک و انتقال حرارت را در ناحیه ورودی نسبت به رژیم غیر لغزشی ثبت کرده‌اند. آنها نشان داده‌اند که با افزایش عدد نودسن، ضریب اصطکاک و عدد نوسلت بطور یکنواخت کاهش می‌یابند. شرط مرزی شار ثابت کمتر مورد توجه قرار گرفته است. تانک و بابازیتوگلو^۴ [۸] انتقال حرارت را در یک ریزمجرای مستطیلی تحت شرط مرزی شار ثابت نوع H2 در جریان توسعه یافته جریانی و گرمایی مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها مقادیر عدد نوسلت را برای نسبت منظرها و اعداد پرانتل، Pr، و اعداد نودسن مختلف گزارش کرده‌اند. بارلتا^۵ و همکاران [۹] جریان مرکب اجباری و آزاد را در یک مجرای مستطیلی عمودی تحت حالت‌های هشتگانه شرط مرزی شار ثابت نوع H2 در جریان توسعه یافته جریانی و گرمایی مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها مقادیر عدد نوسلت را برای نسبت منظرها و نسبت‌های عدد گراشف، Gr، به عدد رینولدز، Re، مختلف گزارش کرده‌اند. اسپیگا و مورینی^۶ [۱۰] رفتار گرمایی جریان اسلاگ^۷ را در یک کانال مستطیلی در رژیم غیرلغزشی بصورت تحلیلی بررسی کرده‌اند. آنها پروفیل سرعت را یکنواخت فرض کرده و حالت‌های هشتگانه شرط مرزی شار ثابت نوع H2 را اعمال کرده‌اند. آنها عدد نوسلت را بر اساس نسبت منظر و عدد گریتز، Gz، گزارش کرده‌اند. کادوسی و ستگن^۸ [۱۱] نیز عدد نوسلت توسعه یافته را در یک ریزمجرای مستطیلی برای حالت‌های هشتگانه شرط مرزی شار ثابت نوع H2 بررسی کرده‌اند.

در مقاله حاضر، انتقال حرارت در یک ریزمجرای مستطیلی تحت شرط مرزی شار ثابت نوع H2 (شار ثابت هم در طول جریان و هم پیرامونی) در جریان با اعداد رینولدز پایین و بصورت سه بعدی در ناحیه ورودی بررسی شده است. مرور مختصری بر رفتار هیدرودینامیکی جریان و پارامتر مهندسی ضریب اصطکاک انجام پذیرفته شده است. هدایت طولی که عامل مهمی در انتقال حرارت در جریان‌های رینولدز پایین است، در حل معادله انرژی در نظر گرفته شده است. توزیع دما در ناحیه ورودی بطور کامل بررسی شده و عدد نوسلت محلی برای نسبت منظرها، اعداد نودسن و اعداد رینولدز مختلف رسم شده است.

۲. فرمولبندی:

هندسه جریان و ترتیب قرار گرفتن محورهای مختصات در شکل ۱ نشان داده شده است. مرکز مختصات در مرکز مجرا قرار داده شده و نسبت منظری به صورت $\alpha^* = 2h/2a$ تعریف شده است. که در آن $2h$ بعد کوتاه‌تر مجرا است. جهت اصلی جریان در راستای محور Z قرار دارد.

جریان تحت مطالعه از نوع جریان تراکم‌ناپذیر آرام لزج با خواص ثابت می‌باشد. از شکل انتگرالی معادلات پیوستگی، نویر استوکس و انرژی بصورت

¹ Inman

² Asoko

³ Renksizbulut

⁴ Tunc and Bayazitoglo

⁵ Barletta

⁶ Spiga and Morini

⁷ Slug flow

⁸ Kaddusi and cetegen

$$\int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{V} dV + \int_V \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} dV = - \int_A p d\vec{A} + \int_A \mu \nabla \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho C_p T dV + \int_V \rho C_p \vec{V} \cdot \nabla T dV = \int_A k \nabla T \cdot d\vec{A} \quad (3)$$

برای مدل کردن حوزه جریان و دما استفاده شده است. جملات ادوکشن بصورت انتگرال حجم بیان شده تا از گسترش خطاهایی که بخاطر حساسیت معادله پیوستگی در جریان‌های ماخ پایین ایجاد می‌شود، جلوگیری گردد. نیروهای جسمی و جمله تلفات لزجت در نظر گرفته نشده‌اند. در ورودی مجرا یک پروفیل یکنواخت برای سرعت و دما به ترتیب بصورت $w = W_i = W_m$ و $T = T_i$ اعمال شده است. مولفه‌های دیگر سرعت در ورودی صفر می‌باشند، $u = v = 0$. در خروجی، از آنجا که طول مجرا همواره طوری تنظیم می‌شود که شرایط کاملاً توسعه یافته حاصل شده باشد، برای مولفه‌های سرعت از شرط گرادیان صفر استفاده شده است؛ که بصورت $f = u, v, w$ و $\partial f / \partial z = 0$ بیان می‌شود. توجه به این نکته ارزشمند است که بعلاوه شرط مرزی گرمایی مورد مطالعه، برخلاف شرط مرزی دما ثابت، استفاده از شرط گرادیان صفر برای دما در خروجی مجاز نمی‌باشد و حتماً بایستی دمای خروجی از طریق برونمایی خطی محاسبه شود. فشار در خروجی برابر صفر تنظیم شده است در حالی که در تمامی وجوه دیگر من جمله ورودی مجرا، از شرط گرادیان فشار صفر استفاده شده است. دیواره‌های مجرا تحت شار گرمایی ثابت نوع H2 قرار دارند. یعنی شار ثابت q'' در طول مجرا و بر هر چهار دیواره بطور یکنواخت اعمال می‌شود. سرعت دیواره‌ها صفر است در حالی که جریان شرایط لغزش سرعت و پرش دما در دیواره‌ها را برآورده می‌کند. بر اساس تئوری جریان لغزشی، سرعت سیال در مجاورت دیواره متفاوت از سرعت دیواره و متناسب با گرادیان محلی سرعت در راستای عمود بر دیواره است. ماکسول [۱۲] رابطه مرتبه اول لغزش سرعت را برای گازهای رقیق تک اتمی بصورت زیر استخراج کرد.

$$w - w_w = \alpha \left(\frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \right) \lambda \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_w \quad (4)$$

به همین ترتیب لغزش برای دیگر مولفه‌های سرعت قابل تعریف است. در اینجا زیر نویس w بیانگر دیواره است که مختصات عمودی n و مختصات مماسی s بر آن تعریف شده است. T_g نیز دمای گاز در مجاورت دیواره می‌باشد. به طور مشابه، دمای سیال در مجاورت دیواره نیز با دمای دیواره متفاوت و متناسب با گرادیان محلی دما در راستای عمود بر دیواره است. رابطه پرش دما توسط اسمولوچوفسکی^۱ [۱۳] بصورت زیر ارائه شده است.

$$T - T_w = \beta \left(\frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{\lambda}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w \quad (5)$$

در معادلات ۴ و ۵ ضریب انطباق مومنتم مماسی، σ_v ، و ضریب انطباق دما، σ_T ، بکار رفته است. این ضرایب مسئول مدل کردن برخورد مولکول‌های سیال با دیواره می‌باشند. در یک برخورد آینه‌ای، مومنتم ذرات در اثر برخورد با دیواره تغییری نمی‌کند در این حالت $\sigma_v = 1$ خواهد بود. از طرف دیگر اگر در اثر برخورد، ذره کاملاً مومنتم دیواره را بپذیرد $\sigma_v = 0$ خواهد بود. به همین ترتیب اگر دمای ذره متأثر از برخورد نشود $\sigma_T = 0$ و اگر دمای دیواره را بپذیرد $\sigma_T = 1$ می‌شود. این ضرایب وابسته به پرداخت سطح، دمای سیال و فشار هستند و معمولاً به صورت تجربی تعیین می‌شوند. با توجه به طبیعت تقریبی شرایط مرزی لغزشی، در اینجا آنها برابر واحد در نظر گرفته شده‌اند. ضرایب α و β نیز برای تصحیح روش تقریبی بکار برده

¹ Smoluchowski

شده توسط ماکسول و اسمولوچوفسکی در استخراج معادلات ۴ و ۵ وارد مسئله شده‌اند [۱۴]. برای هوا این ضرایب معمولاً برابر ۱ فرض می‌شوند.

عدد رینولدز بصورت $Re = \rho W_i D_h / \mu$ تعریف شده است بنابراین از آنجا که جریان تراکم ناپذیر با خواص ثابت است، عدد رینولدز در طول مجرا ثابت باقی می‌ماند. توجه داریم که به علت استفاده از پروفیل سرعت یکنواخت در ورودی، در طول مجرا $W_m = W_i$ می‌باشد. عدد نودسن نیز بر اساس قطر هیدرولیک و بصورت $Kn = \lambda / D_h$ تعریف شده است. که در آن λ متوسط مسیر پویس آزاد گاز می‌باشد.

۳. فرآیند حل:

۳-۱. روش عددی

معادلات حاکم در مختصات عمومی بسط داده شده و سپس با استفاده از روش حجم محدود به فرم تفاضلی تبدیل شده است. روش حل عددی به کار برده شده مبتنی بر Projection Method است که در ابتدا توسط چورین^۱ [۱۵] ارائه شده و توسط دویر^۲ [۱۶] و رنکسیزبولوت و نیازمند [۱۷] توسعه یافته است. روند حل به این صورت می‌باشد که میدان سرعت، از حل معادله مومنتم با استفاده از میدان فشار موجود (از تکرار قبل) و یا تقریبی (آغاز حل) به دست می‌آید. واضح است که این میدان الزاماً معادله پیوستگی را ارضاء نمی‌کند. بنابراین لازم است که یک سرعت اصلاحی به آن اضافه شود. بر اساس تئوری تجزیه هاج^۳ هر تابع برداری را می‌توان به دو بخش شامل مولفه divergence-free و مولفه گرادیان یک تابع پتانسیل تجزیه نمود. بنابراین جمله سرعت اصلاحی، بایستی یک پتانسیل سرعت حاصل از گرادیان یک تابع پتانسیل باشد. فیزیک مسئله را می‌توان اینگونه بازگو کرد که در حل میدان سرعت میانی از میدان فشار موجود، میدان گردشی^۴ در معادله مومنتم به طور دقیق اعمال شده است؛ پس نقص موجود در سرعت بخاطر نقص در میدان فشار، که یک میدان غیر چرخشی است، بوجود آمده و بنابراین بایستی با استفاده از یک میدان غیر چرخشی که با پتانسیل سرعت تعریف می‌شود، اصلاح گردد. با اعمال این سرعت اصلاحی در معادله پیوستگی، این معادله بصورت یک معادله پواسون در می‌آید که از حل آن می‌توان سرعت اصلاحی را محاسبه کرد. می‌توان نشان داد که سرعت اصلاحی مستقیماً به یک فشار اصلاحی مربوط است که به کمک آن حوزه فشار جدید محاسبه می‌شود.

علاوه بر این برای افزایش سرعت همگرایی، بر اساس اینکه شار جرم در تمامی مقاطع یکسان است، اصلاح دیگری نیز در روند حل اعمال شده است. به این صورت که با تعریف کمبود سرعت متوسط به صورت

$$\Delta w' = \bar{W} - W_i \quad (6)$$

که در آن \bar{W} سرعت متوسط در هر مقطع می‌باشد. با این فرض که کمبود سرعت وابسته به کمبود فشار است می‌توان معادله زیر را نوشت

$$\rho \frac{\Delta w'}{\Delta t} = - \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (7)$$

بنابراین با استفاده از جمله کمبود فشار می‌توان میدان فشار را تصحیح نمود. با حل دوباره معادله مومنتم با میدان فشار جدید، میدان سرعت جدید به دست خواهد آمد.

¹ Chorin

² Dwyer

³ Hodge decomposition theorem

⁴ Vorticity field

۲-۳. اعتبارسنجی

اعتبار کد عددی به کار رفته تحت شرایط گوناگون در موارد متعددی بررسی شده است. از آن جمله رنکسیزبولوت و همکاران [۱۷ و ۷]، نیازمند و همکاران [۱۸]، سعیدی [۱۹] و ترکان^۱ [۲۰] را می‌توان نام برد. در مراجع یاد شده کد عددی برای حالت شرط مرزی T در هندسه‌ها و جریان‌های مختلف و شرط مرزی H در جریان بین صفحات موازی با حل‌های تحلیلی و عددی موجود مقایسه شده که در تمامی موارد دقت قابل قبولی را نشان داده است. بنابراین با توجه به اینکه تغییر در شرط مرزی گرمایی تغییری در رفتار هیدرودینامیکی سیال ایجاد نمی‌کند، در اینجا تنها به مقایسه نتایج گرمایی حل حاضر با حل‌های موجود برای شرط مرزی H2، که مورد نظر این مطالعه است، بسنده می‌کنیم.

در شکل ۲ عدد نوسلت کاملاً توسعه یافته با نتایج تانک و بایازیتوگلو [۸] و همچنین کادوسی و سنگن [۱۱] مقایسه شده است. نتایج دقت مورد قبولی را نشان می‌دهد. حداکثر اختلاف ۳۲/۳۸٪ است. البته باید به این مطلب نیز توجه داشت که در کارهای یاد شده هدایت طولی در نظر گرفته نشده است در حالی که این جمله در این مطالعه منظور شده است. بنابراین بالاتر بودن عدد نوسلت در کار حاضر نسبت به کارهای مذکور قابل انتظار بوده و نایبستی تمام این اختلاف را به خطای حل انتساب داد.

۴. بحث در نتایج

۴-۱. میدان سرعت

برای دستیابی به یک دید کلی در ارتباط با رفتار هیدرودینامیکی جریان در طول مجرا، می‌توان از پروفیل‌های سرعت در مقاطع مختلف بهره جست. در شکل ۳ پروفیل سرعت محوری در سه مقطع مختلف برای اعداد نودسن متفاوت در $Re = 1$ رسم شده است. در ورودی مجرا وجود دیواره‌ها در شرایط عدم لغزش ($Kn = 0.0$) باعث صفر شدن ناگهانی سرعت سیال مجاور دیواره می‌شوند. این تغییر سرعت باعث افزایش شدید فشار در این ناحیه می‌شود که خود عامل راندن سیال هم در جهت جریان و هم به سمت هسته است. قسمت اول خود را بصورت اورشوت سرعت در نزدیکی دیواره نشان می‌دهد. با افزایش عدد نودسن و ورود به رژیم لغزشی امکان لغزش سرعت روی دیواره بوجود می‌آید که همراه با افزایش کمتر فشار در این ناحیه و در نتیجه کاهش اورشوت سرعت است. با پیشروی در طول مجرا به علت کاهش گرادیان‌های سرعت روی دیواره، لغزش سرعت کاهش می‌یابد. به هر حال همانگونه که شکل نشان می‌دهد در اعداد نودسن بالاتر پروفیل سرعت مسطح‌تر است و این به معنی حضور گرادیان‌های سرعت کوچکتر نسبت به رژیم غیر لغزشی است که ممکن است در برخی کاربردها عامل تعیین کننده باشد. تغییرات ضریب اصطکاک ظاهری در ناحیه ورودی برای اعداد نودسن مختلف در شکل ۴ نشان داده شده است. در این شکل طول بی‌بعد بصورت $z^+ = z / (Re D_h)$ تعریف شده است. ضریب اصطکاک ظاهری نیز بر اساس تغییرات فشار تعریف می‌شود که مجموع اثرات تنش برشی روی دیواره و تغییرات فشار به علت تغییر در مومنتم جریان در ناحیه ورودی را دربر می‌گیرد.

$$f_{app} Re = \frac{1}{4z^+} \frac{\Delta \bar{p}}{\rho W_i^2 / 2} \quad (۸)$$

که در آن $\Delta \bar{p}$ تغییرات فشار از ورودی مجرا ($z^+ = 0$) می‌باشد. همانگونه که در شکل نشان داده شده است در نزدیکی مقطع ورودی به علت وجود گرادیان‌های شدید سرعت و همچنین تغییرات قابل ملاحظه مومنتم، ضریب اصطکاک مقادیر بزرگی را اختیار می‌کند. در حالی که با پیشروی به سمت ناحیه کاملاً توسعه یافته، این مقدار کوچکتر می‌شود. افزایش عدد نودسن نیز همانگونه که قبلاً گفته شد از طریق کاهش گرادیان سرعت روی دیواره و مسطح‌تر کردن پروفیل سرعت باعث کاهش ضریب اصطکاک می‌شود.

^۱ Tercan

هنگام استفاده از شرط مرزی شار ثابت، معمولاً پروفیل دما بصورت

$$\theta = \frac{T_{ref} - T}{q'' D_h / k} \quad (9)$$

بی‌بعد می‌شود که در آن T_{ref} اغلب دمای ورودی، T_i ، در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که دمای ورودی یک دمای ثابت است استفاده از آن بعنوان دمای مرجع، مقایسه پروفیل‌های مختلف را آسان می‌کند و برای بیان روابط در ناحیه توسعه یافته بسیار مفید است. توجه به این مسئله جالب است که مخرج کسر در پروفیل دمای بی‌بعد، $q'' D_h / k$ ، ضریبی از $T_w - T_m$ می‌باشد که در حالت دمای سطح ثابت مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مطلب از این حقیقت استخراج می‌شود که در جریان داخلی عدد نودسن از مرتبه یک، $O(1)$ ، می‌باشد [۲۱].

شکل ۵ پروفیل دما را در صفحه تقارن مجرا، $x = 0$ ، در مقاطع مختلف در جهت جریان نشان می‌دهد. در تهیه این نمودار استثنائاً از دمای محلی دیواره بعنوان دمای مرجع استفاده شده است. از آنجا که در جریان تحت شرط مرزی شار ثابت دمای متوسط سیال و دمای دیواره در طول مجرا بصورت خطی افزایش می‌یابد، استفاده از دمای دیواره بعنوان دمای مرجع اثر این افزایش طولی را از پروفیل دما حذف و تنها افزایش دما نسبت به دیواره را نشان می‌دهد. در این صورت می‌توان رشد پروفیل دما از یک پروفیل کاملاً مسطح در ورودی تا یک پروفیل کاملاً توسعه یافته، که با پیشروی در طول کانال دیگر تغییری در آن ایجاد نمی‌شود، را در یک شکل مانند شکل ۵ نشان داد. به علت اعمال شرط مرزی شار ثابت، همانگونه که از شکل بر می‌آید شیب پروفیل دما در دیواره برای تمامی مقادیر عدد نودسن و در تمامی مقاطع یکسان است. این مقدار برای پروفیل دمای بی‌بعد برابر یک می‌باشد. در $Kn = 0.1$ پرش دما در دیواره مشهود است. از آنجا که اندازه پرش دما متناسب با شیب پروفیل دما است، این مقدار در طول مجرا ثابت و تنها وابسته به عدد نودسن می‌باشد. باید توجه داشت که ترکیب شار ثابت و پرش دما در اینجا به این صورت مدل شده است که شار حرارتی پس از عبور از دیواره وارد سیال می‌شود و بر اساس همین شار محاسبات مربوط به شرط مرزی انجام می‌پذیرد. پرش دمایی اثری مشابه مقاومت سطح دارد که پس از محاسبه دمای سیال در مجاورت دیواره از شرط مرزی شار ثابت، بنا به شرط پرش دما و بر حسب عدد نودسن مربوطه اعمال می‌شود. در حقیقت تغییرات عدد نودسن از طریق تاثیر بر حوزه جریان، بر حوزه دما اثر می‌گذارد. شکل ۵ همچنین نشان می‌دهد که دمای بی‌بعد کاملاً توسعه یافته در مرکز مجرا در $Kn = 0$ ، تقریباً ۰٫۴ بیشتر از دمای سیال مجاور دیوار است در حالی که در $Kn = 0.1$ این عدد به حدود ۰٫۳۳ کاهش می‌یابد. از این مقایسه می‌توان نتیجه گرفت که پروفیل دما در اعداد نودسن بالاتر مسطح‌تر است.

پروفیل‌های سه بعدی دمای بی‌بعد، θ ، در شکل ۶ نشان داده شده است. در نزدیکی ورودی مجرا، هسته جریان هنوز تحت تاثیر شار حرارتی دیواره‌ها قرار نگرفته و بنابراین پروفیل دما شکل مسطحی دارد. با پیشروی در طول جریان همزمان با افزایش دمای دیواره، هسته جریان نیز تاثیر بیشتری پذیرفته و دمای این ناحیه نیز افزایش می‌یابد تا اینکه پروفیل دما شکل نهایی خود را بدست آورد (شکل ۶-ب). البته باید توجه داشت که بعلاوه استفاده از دمای ورودی، T_i ، بعنوان دمای مرجع، حتی در حالت کاملاً توسعه یافته نیز مقادیر θ با پیشروی در طول جریان افزایش می‌یابد اما بهر حال شکل نسبی پروفیل دما (دمای نقاط مختلف یک مقطع طولی نسبت به دمای متوسط دیواره) ثابت می‌ماند. از آنجا که شار حرارتی روی دیواره ثابت است، پس می‌بایست دمای دیواره متغیر باشد. بنابراین دمای دیواره همانگونه که در شکل نشان داده شده از یک مقدار بیشینه در گوشه‌ها تا یک مقدار کمینه در وسط هر دیواره، جایی که در مجاورت جریان قوی‌تری قرار دارد، تغییر می‌کند. این اختلاف دما از ویژگی‌های شرط مرزی H_2 است و با پیشروی در طول جریان افزایش می‌یابد تا اینکه نهایتاً به حالت کاملاً توسعه یافته برسد.

در شکل ۷ کانتورهای دمای بی‌بعد در مقاطع مختلف و برای اعداد نودسن متفاوت رسم شده است. در هر مقطع در طرف راست خطوط دما ثابت در رژیم لغزشی ($Kn = 0.1$) و در طرف چپ خطوط دما ثابت در رژیم غیر لغزشی ($Kn = 0.0$)

رسم شده است. مقایسه کانتورهای دما در دو رژیم نشان می‌دهد که در رژیم لغزشی هسته جریان گرمتر از شرایط مشابه خود در رژیم غیر لغزشی است. دمای سیال مجاور دیواره نیز در رژیم لغزشی بیشتر از رژیم غیر لغزشی است هرچند تفاوت آن دو بسیار ناچیز است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که پروفیل دما در رژیم لغزشی شکل مسطح‌تری نسبت به رژیم غیر لغزشی دارد. این امر به علت آن است که پروفیل سرعت در رژیم لغزشی مسطح‌تر از پروفیل سرعت در رژیم غیر لغزشی است. مسطح‌تر بودن پروفیل دما به معنای وجود گرادیان‌های دمای کمتر در هر مقطع است که ممکن است در کاربردهایی که وجود گرادیان‌های دمایی بزرگ خطر آفرین است، مانند برخی کاربردها در بیوتکنولوژی، عامل تعیین کننده باشد.

تغییرات ضریب انتقال حرارت بی‌بعد، عدد نوسلت، در شکل ۸ برای $Re = 1$ و اعداد نودسن مختلف در یک مجرای مربعی نشان داده شده است. علی‌رغم ثابت بودن شار محوری و پیرامونی، به علت متغییر بودن توزیع دما در هر دو راستا عدد نوسلت هم در طول و هم در پیرامون مجرا متغییر است. بنابراین در تهیه شکل ۸ عدد نوسلت به صورت پیرامونی میانگین گرفته شده است.

$$Nu = \frac{h_x D_h}{k} = \frac{q'' D_h}{k(T_w - T_m)} \quad (10)$$

که در آن T_w و T_m به ترتیب دمای دیواره متوسط پیرامونی و دمای متوسط سیال است که از روابط (۱۱) و (۱۲) محاسبه می‌شوند.

$$T_w = \frac{1}{P} \int T_{w,l} ds \quad (11)$$

$$T_m = \frac{1}{AW_i} \int T \bar{V} \cdot d\bar{A} \quad (12)$$

که در آن P ، $T_{w,l}$ و ds به ترتیب نشان دهنده محیط مجرا، دمای محلی دیواره و دیفرانسیل طول روی محیط هستند. با توجه به جریان مورد مطالعه، در معادله ۱۰ تنها اختلاف دمای میانگین سیال و دیواره متغییر است. از این رو تغییرات این جمله است که منجر به ایجاد شکل ۸ می‌شود. در ورودی مجرا از آنجا که هنوز لایه مرزی گرمایی شکل نگرفته است ادوکشن شدید در کنار دیواره باعث می‌شود در رژیم غیر لغزشی اختلاف دمای بین سیال و دیواره به صفر میل کند که به یک عدد نوسلت بزرگ می‌انجامد. اما در رژیم لغزشی بعلاوه اعمال شرط مرزی پخش دمایی، اختلاف دمای میانگین سیال و دیواره به یک مقدار حدی بزرگتر از صفر میل می‌کند و در نتیجه عدد نوسلت حاصله عددی به مراتب کوچکتر است که به یک مقدار حدی میل می‌کند. با ادغام تعریف عدد نوسلت (معادله ۱۰) و شرط پخش دما (معادله ۵) به سادگی می‌توان نشان داد که این مقدار حدی عبارت است از $Nu \rightarrow 1/CKn$ که در آن $C = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right] \left[\frac{1}{Pr} \right]$ می‌باشد [۷]. این مقدار مستقل از Re و هندسه است چرا که در ورودی مجرا، یک پروفیل سرعت و دمای یکنواخت بعنوان شرط مرزی تعریف شده است که برای تمامی جریان‌ها و هندسه‌ها یکسان است. با پیشروی در طول مجرا عدد نوسلت بطور یکنواخت کاهش می‌یابد تا نهایتاً به مقدار کاملاً توسعه یافته خود برسد. میزان تغییرات عدد نوسلت از ورودی تا بخش کاملاً توسعه یافته برای $Kn = 0.0$ بیش از ۷۰۰٪ و برای $Kn = 0.1$ بیش از ۲۰۰٪ می‌باشد. این مطلب تأکیدی است بر اهمیت تحلیل ناحیه ورودی در مجراهای کوتاه که در آنها انتقال حرارت در ناحیه ورودی با انتقال حرارت در کل کانال قابل مقایسه است. تغییرات کمتر عدد نوسلت در نودسن‌های بالاتر از آنجا ناشی می‌شود که با افزایش عدد نودسن، همانگونه که قبلاً گفته شد پروفیل دمای کاملاً توسعه یافته، مسطح‌تر می‌شود.

تغییرات عدد نوسلت کاملاً توسعه یافته نسبت به عدد نودسن در شکل ۹ نشان داده شده است. افزایش عدد نودسن منجر به یک پروفیل دمای مسطح‌تر می‌شود و در نتیجه به افزایش دمای متوسط سیال می‌انجامد. از طرفی افزایش عدد نودسن مطابق شرط پخش دما به افزایش دمای دیواره می‌انجامد. هرچند هر دو این افزایش‌ها بسیار اندک است اما افزایش دمای دیواره به مراتب بیشتر از افزایش دمای متوسط سیال است. بنابراین افزایش عدد نودسن منجر به افزایش اختلاف بین

دمای دیواره و دمای متوسط سیال و در نتیجه کاهش عدد نوسلت می‌شود. بهرحال افزایش عدد نودسن از صفر به ۰/۱ در $Re = 1$ باعث کاهش ۱۳/۹۳٪ عدد نوسلت کاملاً توسعه یافته در نسبت منظری ۰/۵ و کاهش ۱۳/۷۱٪ در نسبت منظری یک شده است.

وابستگی عدد نوسلت کاملاً توسعه یافته به عدد رینولدز در شکل ۱۰ بررسی شده است. با افزایش عدد رینولدز به ۱، عدد نوسلت کاهش می‌یابد. بیشترین این تغییر ۲/۸۵٪ است که در نسبت منظری ۰/۵ و $Kn = 0.1$ رخ می‌دهد. افزایش عدد رینولدز از ۱ به ۱۰ با افزایش جزئی عدد نوسلت همراه بوده است. بیشترین این افزایش ۰/۲۵٪ است که در همان مورد قبلی اتفاق می‌افتد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که عدد نوسلت در نسبت منظرها و اعداد نودسن پایین‌تر به تغییرات عدد رینولدز حساس‌تر است و با افزایش عدد رینولدز این حساسیت کاهش می‌یابد.

۵. نتیجه‌گیری

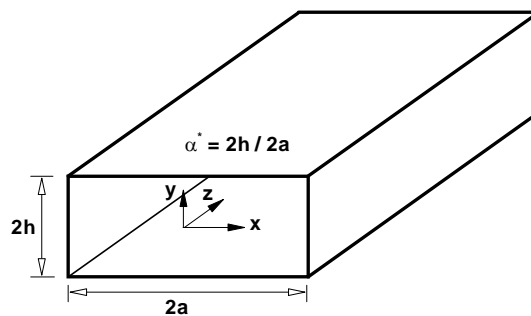
جریان سیال و انتقال حرارت در ریزمجراهای مستطیلی تحت شار مرزی H_2 مورد بررسی قرار گرفته است. فرم انتگرالی معادلات نویر استوکس در مختصات عمومی بسط داده شده و با اعمال شرایط مرزی لغزش سرعت و پرش دما، بصورت عددی حل شده است. با تغییر رژیم جریان از عدم لغزش به جریان لغزشی، کاهش قابل توجهی در ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت در ناحیه ورودی ملاحظه می‌شود که با نزدیک شدن به ناحیه کاملاً توسعه یافته این اختلاف کاهش می‌یابد. به علت ثابت بودن شار حرارت روی محیط مجرا، دمای محیطی متغیر است و از یک مقدار بیشینه در گوشه‌ها تا یک مقدار کمینه در وسط هر دیواره تغییر می‌کند. در رژیم لغزشی هسته جریان دمای بالاتری نسبت به جریان غیر لغزشی دارد. در عین حال در این رژیم گرادیان‌های دما در هر مقطع کوچکتر از گرادیان‌های دما در رژیم غیر لغزشی است. کاهش نسبت منظری به کاهش عدد نوسلت می‌انجامد و بیشترین عدد نوسلت در مجرای مربعی حاصل می‌شود.

در ادامه کار حاضر، اثر انواع هشتگانه شرط مرزی H_2 که در مقالات معمول است و همچنین اثر شار متغیر طولی، می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. علاوه بر این اثر خزش دمایی در شرایط اعمال شار حرارتی در مرزها نیز بایستی بررسی شود. به نظر می‌رسد جمله خزش دمایی عاملی متناسب با مرتبه دوم عدد نودسن باشد [۷]، و به همین دلیل در مقاله حاضر از آن صرفنظر شده است. اما از آنجا که در حضور شار حرارتی در مرزها ممکن است گرادیان‌های دمای محوری قابل ملاحظه‌ای در مجاورت دیواره‌ها ایجاد شود، می‌بایست میزان اثر این جمله با دقت بیشتری مورد بررسی قرار گیرد.

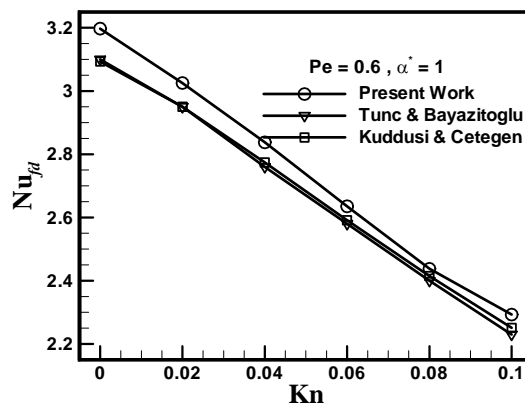
مراجع:

- [1] P. Wu, W.A. Little, Measurements of friction factors for the flow of gases in very fine channels used for micro miniature Joule-Thomson refrigerators, *Cryogenics*, Vol. 23, pp. 273-277, 1983.
- [2] A. Beskok, G.E. Karniadakis, Simulation of slip-flows in complex micro geometries, *J. Micromech. Syst. DSC*, Vol. 40, pp. 355-370, 1992.
- [3] S.E. Turner, L.C. Lam, M. Faghri, O.J. Gregory, Experimental investigation of gas flow in microchannels, *J. Heat Transfer*, Vol. 126, pp. 753-763, 2004.
- [4] R.M. Inman, Laminar slip flow heat transfer in a parallel plate channel or a tube with uniform wall heating, *NASA Report D-2393*, 1964.
- [5] H.P. kavehpour, M. Faghri, Y. Asako, Effects of compressibility and rarefaction on gasies flow in microchannels, *Numer. Heat Transfer Part A*, Vol. 32, pp. 677-696, 1997.
- [6] Y. Asako, Heat transfer characteristics of gaseous flow in a micro-tube, in: *Second International conference on microchannels and Minichannels*, June 17-19, Rochester, New York, USA, pp. 305-311, 2004.
- [7] M. Renksizbulut, H. Niazmand, G. Tercan, Slip-flow and heat transfer in rectangular microchannels with constant wall temperature, *Int. J. Thermal Sciences*, Vol. 45, pp. 870-881, 2006.
- [8] G. Tunc, Y. Bayazitoglo, Heat transfer in rectangular microchannels, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 765-773, 2002.
- [9] A. Barletta, E. Rossi di schio, E. Zanchini, Combined forced and free flow in a vertical rectangular duct with prescribed wall heat flux, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 24, pp. 874-887, 2003.
- [10] M. Spiga, G. L. Morini, The developing Nusselt numbers for slut flow in rectangular duct, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, pp. 2799-2807, 1998.

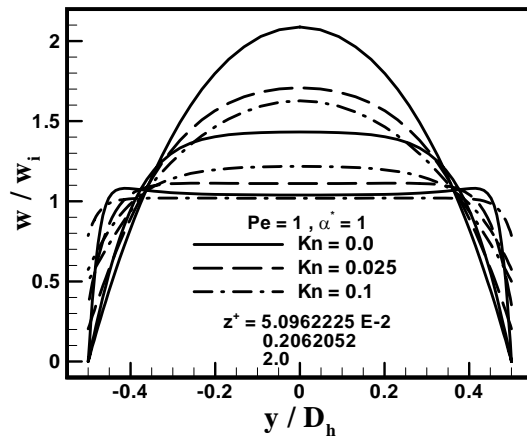
- [11] L. Kuddusi, E. Cetegen, Prediction of temperature distribution and Nusselt number in rectangular microchannels at wall slip condition for all version of constant heat flux, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 28, pp. 777-786, 2007.
- [12] J.C. Maxwell, On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature, *Philos. Trans. Roy. Soc. Part 1*, Vol. 170, pp. 231-259, 1879.
- [13] M. von Smoluchowski, Über wärmeleitung in verdünnten gasen, *Ann. Phys. Chem.*, Vol. 64, pp. 101-130, 1898.
- [14] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer, New York, 1988.
- [15] A.J. Chorin, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, Vol 22, pp. 745-762, 1968.
- [16] H.A. Dwyer, Calculation of droplet dynamics in high temperature environments, *Prog. Energy Combust. Sci.*, Vol. 15, pp. 131-158, 1989.
- [17] M. Renksizbulut, H. Niazmand, Laminar flow and heat transfer in the entrance region of trapezoidal channels with constant wall temperature, *J. Heat Transfer*, Vol. 128, pp. 63-74, 2006.
- [18] H. Niazmand, G. Tercan, M. renksizbulut, Entrance region flows in rectangular microchannels with constant wall temperature, in: *Proceeding of ICMM2005, 3rd International Conference on Microchannels and Minichannels*, June 13-15, 2005, Toronto, Canada.
- [19] E. Saeedi, Developing Slip-Flow and Heat transfer in Trapezoidal Microchannels, MSc Thesis, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Khorasan Razavi, Iran, 2007.
- [20] G. Tercan, Heat transfer and fluid flow in rectangular microchannels, MSc Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2005.
- [21] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, pp 109-112, 1995.



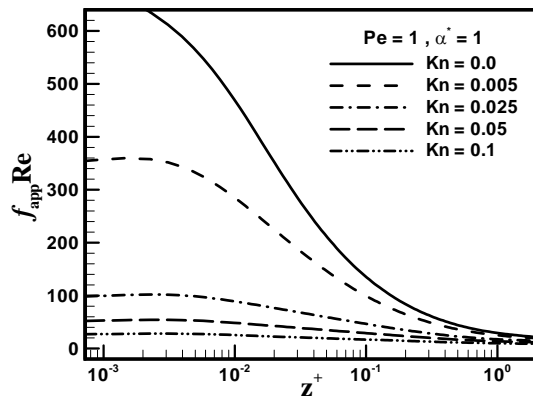
شکل ۱. هندسه جریان



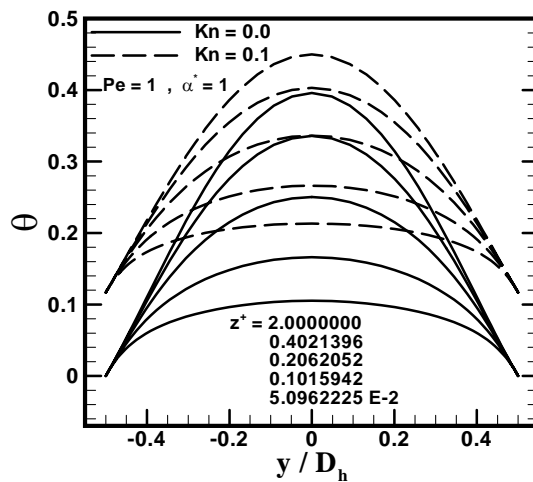
شکل ۲: مقایسه عدد نوسلت کاملاً توسعه یافته برای $Pe = 0.6$ در یک مجرای مربعی



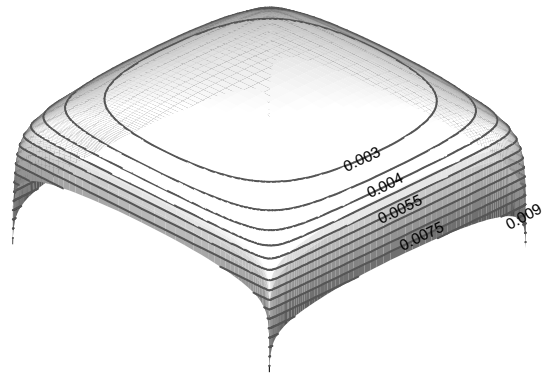
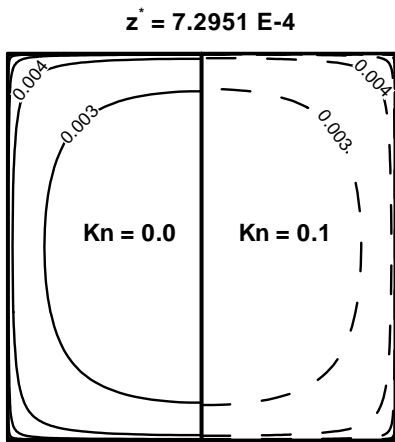
شکل ۳: پروفیل سرعت بی بعد در مقاطع و اعداد نودسن مختلف



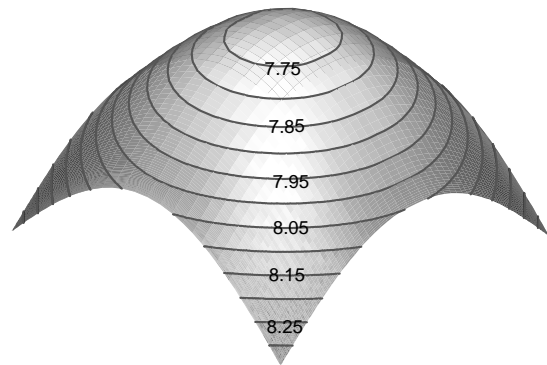
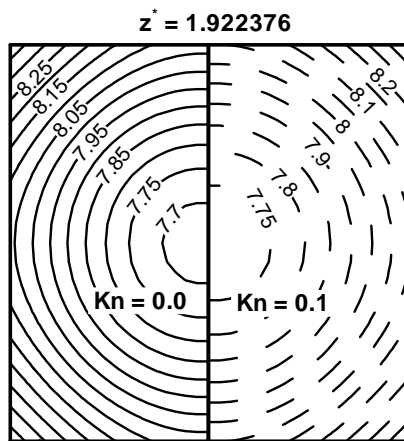
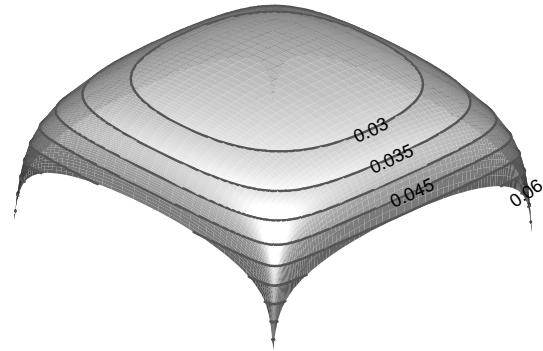
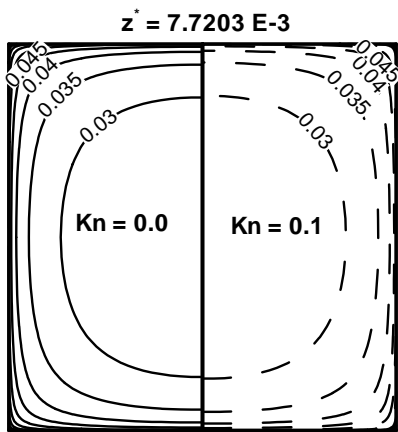
شکل ۴: تغییرات ضریب اصطکاک ظاهری در ناحیه ورودی



شکل ۵: پروفیل دمای بی بعد در صفحه تقارن $x = 0$ در مقاطع طولی و اعداد نودسن مختلف

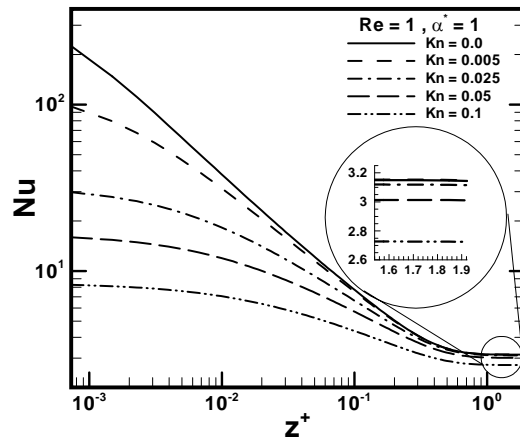


الف

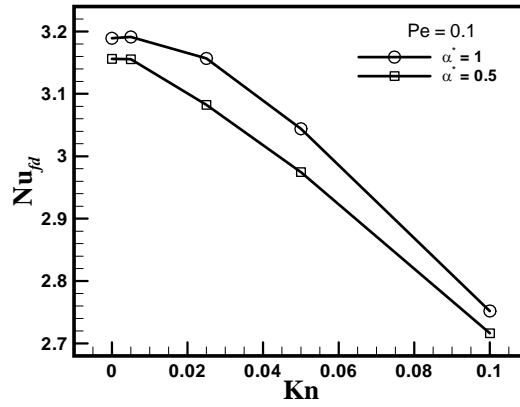


شکل ۷: کانتورهای دمایی بی‌بعد در مقاطع مختلف در $Kn = 0.1$ و $Kn = 0.0$ برای $\alpha^* = 1$ و $Pe = 1$

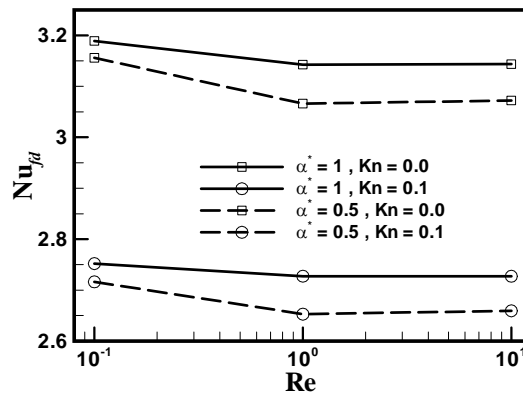
شکل ۶: پروفیل‌های سه بعدی دمایی بی‌بعد برای $\alpha^* = 1$ و $Kn = 0.1$ ، $Pe = 1$
 الف) $z^+ = 7.2951 \text{ E-4}$ ب) $z^+ = 7.7203 \text{ E-3}$ ج) $z^+ = 1.9224$



شکل ۸: تغییرات محوری عدد نوسلت در ناحیه ورودی



شکل ۹: تغییرات عدد نوسلت کاملا توسعه یافته در مقابل عدد نودسن برای $Re = 0.1$



شکل ۱۰: عدد نوسلت کاملا توسعه یافته در مقابل عدد رینولدز

Numerical investigation of slip flow and heat transfer in the entrance region of rectangular microchannels under H2 heat flux boundary condition

Hamid Niazmand

Associated professor
Ferdowsi University of Mashhad
faculty of Engineering, department of Mechanics
P.O.B. 91775-1111

Ali Amiri J.

MSc. Student
Ferdowsi University of Mashhad
faculty of Engineering, department of Mechanics

Abstract:

Channels with hydraulic diameter less than 1 mm are classified as microchannels. An important effect associated with microchannel flows is rarefaction effect. The Knudsen number, Kn , is a measure of the degree of rarefaction, which is defined as the ratio of the mean free path to an appropriate macroscopic length scale of the flow. For Knudsen numbers in the range $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$, deviations from continuum behavior arise near the walls, where in a thin layer called the Knudsen layer, molecular collisions with the walls dominate over intermolecular collisions. In this range of Knudsen numbers which is called slip-flow regime, the standard Navier-Stokes and energy equations can still be used for the prediction of the flow and thermal field if modified boundary conditions allowing for velocity-slip and temperature-jump at the walls are employed.

A survey on the available literature on microchannels indicates the shortage of information for 3-D flows in slip regime. Furthermore, most of researchers have focused on the hydrodynamically and thermally developed regions and there is a lack of information in developing region. Even in cases where the thermally developing region is investigated the flow is assumed to be fully developed. It is notable that in short microchannels which are commonly used in micro heat exchangers and MEMS devices, heat transfer in the entrance region is considerable. Also, researchers usually ignore the effect of axial heat conduction, which is not negligible in low Peclet flows associated with microchannel flows.

In the present article, heat transfer in a microchannel under H2 boundary condition (constant heat flux both axially and peripherally) for low Peclet flows is investigated numerically. Standard Navier-Stokes and energy equations for an incompressible laminar flow along with slip-velocity and temperature-jump boundary conditions are solved in a general coordinates system using a finite volume method. Fluid flow and Fanning friction factor will be investigated in the entrance region. In thermal field, geometry, Reynolds number, Prandtl number, and Knudsen number are effective parameters. A considerable reduction in Fanning friction factor and heat transfer coefficient is observed in slip flow regime, particularly in the entrance region.

Keywords: *Microchannel, Slip regime, Temperature-jump, 3-D Heat transfer, Entrance length, H2 boundary condition*