

ترکیب روش‌های یال فزری و گوی-رأسی: روشی جدید برای مش‌های انطباق‌پذیر

محتشم فخار خرابی^۱، محمود پسندیده فرد^۲

۱- دانشکده مهندسی مشهد - دانشکده مهندسی - گروه مهندسی مکانیک

چکیده

در بسیاری از شبیه‌سازی‌های عددی جریان، مسأله دارای مرزها یا سطوح متحرک است. آسان‌ترین روش حل چنین مسایلی، استفاده از مش‌های انطباق‌پذیر است. رایج‌ترین تکنیک برای تغییر شکل دادن مش، روش سنتی همانندی فزری است. این روش تا زمانی خوب کار می‌کند که مش مورد نظر بسیار ریز نباشد و یا جابجایی‌ها، در مقایسه با اندازه شبکه، بسیار بزرگ نباشند. متأسفانه در کاربردهای عملی بسیاری، جابجایی‌هایی که در شبکه رخ می‌دهند بزرگ هستند. افزودن فنرهای پیچشی می‌تواند قدرت روش همانندی فزری را به طور محسوسی افزایش دهد، اما این روش نیز معایبی دارد، از جمله: ۱- آن را تنها برای مش‌های ساده (simplicial) یا چهار وجهی با وجوه مثلثی می‌توان به کار برد. ۲- به ازای جابجایی‌های بزرگ در مرزها، این روش نمی‌تواند به طور کامل به جابجایی‌های مورد نظر دست یابد و یا المان‌های تختی تولید می‌کند. بنابراین، ما در این مقاله، یک روش جدید برای تغییر شکل مش معرفی می‌کنیم که از نظر محاسباتی، بیان ریاضیاتی پیچیده‌ای ندارد. ما می‌خواهیم الگوریتم یکپارچه‌ای ارائه کنیم که بتواند هر نوع شبکه‌ای (شش وجهی با وجوه مربعی (hexahedral)، چهار وجهی با وجوه مثلثی (tetrahedral)، منشوری (prism)، هرمی (pyramid)، مقید (pent)، مش‌های باسازمان و حتی مش‌های ترکیبی) را تغییر شکل دهد. روش پیشنهاد شده که "روش گوی-رأسی" (The Ball-Vertex Methodology) نامیده می‌شود، تضمین می‌کند که حتی به ازای جابجایی‌هایی با دامنه بزرگ نیز یک مش صحیح تولید شود. ما در این مقاله، روش یال فزری را با روش گوی-رأسی ترکیب کرده و از آن برای تطبیق دادن مش با جابجایی، دوران و ایجاد شکستگی در یک هوآبر استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مش انطباق‌پذیر - روش همانندی فزری - روش گوی-رأسی - مش ساده - مش غیر ساده

مقدمه

مش‌های تغییر شکل‌پذیر در کاربردهای عملی بسیاری مورد استفاده قرار می‌گیرند، از جمله آن‌ها، مسایلی هستند که مرزها یا سطوح متحرک دارند. برای حل کردن چنین مسایلی، باید یکی از دو عمل ذیل انجام شود: ۱- در هر لحظه که مرزها حرکت می‌کنند، یک مش منطبق بر جسم تولید شود، ۲- شبکه موجود تغییر شکل دهد تا با جابجایی‌های اعمال شده بر مرزها منطبق شود. گزینه اول بسیار سنگین بوده و از نظر محاسباتی هزینه زیادی دارد (به خصوص برای مسایل سه‌بعدی). گزینه دوم ارجحیت دارد، زیرا اجرای آن آسان‌تر بوده و برای مسایل ناپایدار مناسب‌تر است.

آسان‌ترین و پُر استفاده‌ترین تکنیک برای تغییر شکل دادن مش، همانندی فزری است [۱]، در این تکنیک، به جای هر یال، یک فنر موهومی قرار می‌گیرد و سختی این فنر به طور معکوس متناسب با طول

یالی است که جایگزین آن شده است. اگرچه این روش در برخی موارد بسیار خوب کار می‌کند، اما وقتی که حرکت موضعی شبکه در مقایسه با اندازه موضعی مش بزرگ باشد، این روش دچار واماندگی می‌گردد. این محدودیت‌ها، مشکلات بزرگی را به بار می‌آورند، به خصوص برای شبیه‌سازی جریان به صورت ضمنی، زیرا در حل‌کننده‌های (solver) ضمنی، گام‌های زمانی می‌توانند بسیار بزرگ باشند به طوری که مش جریان می‌تواند دستخوش تغییر شکل‌های نسبتاً بزرگی قرار گیرد. به همین جهت، نیاز به روش‌هایی احساس می‌شود که بتوانند تغییر شکل‌های بزرگ را تحمل کنند. برای این منظور فارهات (Farhat) و همکارانش [۲ و ۳] برای مقابله با مکانیزم‌های احتمالی فروپاشی مش‌های مثلثی و چهار وجهی با وجوه مثلثی، فنرهای پیچشی را به فنرهای خطی یالی، افزودند. اما این روش نیز در تمام موارد قابل استفاده نیست. زیرا ممکن است المان‌های چهار ضلعی (quadrilateral) و شش وجهی با وجوه مربعی دچار اعوجاج شوند [۴]. مانع دیگری که بر سر راه استفاده از این روش وجود دارد این است که آن را تنها برای مش‌های ساده یا چهار وجهی با وجوه مثلثی می‌توان به کار برد مگر اینکه المان‌های شش وجهی با وجوه مربعی / منشوری / هرمی به چند چهار وجهی با وجوه مثلثی تقسیم شوند. بعلاوه، همانطور که در مرجع [۵] نشان داده شده است، روش فنر پیچشی هنوز به درستی کار نمی‌کند، زیرا یا به جابجایی‌های مورد نظر به طور کامل دست نمی‌یابد و یا المان‌های تختی تولید می‌کند. بنابراین، ما در این مقاله، یک روش جدید جهت تغییر شکل مش معرفی می‌کنیم که برای جابجایی‌های بزرگ مناسب است و از نظر محاسباتی نیز، بیان ریاضیاتی پیچیده‌ای ندارد. بعلاوه می‌تواند هر نوع شبکه‌ای (شش وجهی، چهاروجهی، منشوری، هرمی، مقید، مش‌های باسازمان و حتی مش‌های ترکیبی) را تغییر شکل دهد. روش پیشنهاد شده که "روش گوی-رأسی" نامیده می‌شود، به طور مفصل در قسمت‌های بعدی توضیح داده شده است.

نمای کلی این مقاله بدین شرح است: ابتدا اساس کار مش‌های تغییر شکل‌پذیر بیان می‌شود، سپس روش همانندی فزری به اختصار توضیح داده می‌شود و در نهایت، پس از معرفی روش گوی-رأسی، چند نمونه حل عددی ارائه می‌گردد.

مش‌های تغییر شکل‌پذیر

آسان‌ترین روش حل مسایلی که در آن‌ها قسمتی از مرز حرکت می‌کند، استفاده از مش تغییر شکل‌پذیر است. در یک مش تغییر شکل‌پذیر، شبکه برای انطباق خود با جابجایی‌های مرزی، تغییر شکل پیدا می‌کند. برای این منظور، موقعیت جدید یک رأس باید با استفاده از روشی قدرتمند و مؤثر تعیین گردد، به گونه‌ای که المان‌های نادرست تولید نشوند حتی اگر دامنه جابجایی‌ها بزرگ باشد. ایده اصلی که در پشت تمامی این دسته مسایل وجود دارد این است که بر روی حوزه حل، یک کشسانی (elasticity) موهومی مناسب تعریف شود.

$$\mathbf{f}_{ij}^{Edge} = \mathbf{k}_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \quad \mathbf{i}_{ij} \mathbf{i}_{ij} = \mathbf{f}_{ij}^{Edge} \quad (7)$$

که \mathbf{k}_{ij} سفتی فنر بوده و نوعاً به گونه‌ای اختیار می‌شوند که به طور معکوس متناسب با طول یال باشد.

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{1}{L_{ij}} \quad (8)$$

موقعیت هر رأسی که تحت تأثیر \mathbf{u}_E عدد یال فنری متصل به آن قرار دارد با نوشتن معادله تعادل تعیین می‌گردد [۱].

$$\sum_{j=1}^{n_E} \mathbf{f}_{ij}^{Edge} = \mathbf{0} \quad (9)$$

برای دستگاه معادله خطی حاصل، ماتریس ضرایب (ماتریس سختی) مجموعه‌ای از وارده‌های بلوکی (block entry) 3×3 است که همه آن‌ها سهم خود را بر یالی که رئوس \mathbf{i} و \mathbf{j} را به هم متصل می‌کند، وارد می‌کنند. این وارده‌های بلوکی $\mathbf{K}_{ji} = -\mathbf{A}_{ji}$, $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{K}_{ji} = -\mathbf{A}_{ji}$ بوده و در آن‌ها $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{k}_{ij} \mathbf{i}_{ij} \mathbf{i}_{ij}$ است. وارده‌های بلوکی مذکور را می‌توان به آسانی و با انجام یک بازبینی در معادله (۷) محاسبه کرد. چگونگی توزیع ماتریس‌های سختی موضعی در ماتریس سختی کلی در معادله ذیل ارائه گردیده است:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{K}_{ii} & \dots & \dots & \mathbf{K}_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{K}_{ji} & \dots & \dots & \mathbf{K}_{jj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (10)$$

عمومی‌ترین روش حل این دستگاه روش گوس-سایدل صریح است. اگرچه روش سنتی همانندی فنری در برخی موارد بسیار خوب کار می‌کند، اما وقتی که حرکت موضعی شبکه در مقایسه با اندازه موضعی مش کوچک نباشد، این روش دچار واماندگی می‌گردد. متأسفانه در کاربردهای عملی بسیاری، جابجایی‌هایی که در شبکه رخ می‌دهند کوچک نیستند. بعلاوه، حتی اگر جابجایی‌ها هم کوچک باشند، همانندی فنری یا روش یال-فنری نمی‌تواند از ایجاد المان‌های تخت جلوگیری کند. به همین جهت، نیاز به روش‌هایی احساس می‌شود که بتوانند تغییر شکل-های بزرگ را تحمل کنند. بنابراین، ما در این مقاله، روش جدید "گوی-رأسی" را معرفی می‌کنیم که برای جابجایی‌های بزرگ مناسب است.

روش فنری گوی-رأسی

روش گوی رأسی تضمین می‌کند که حتی به ازای جابجایی‌هایی با دامنه بزرگ نیز یک مش صحیح تولید شود. ایده اصلی، استفاده از روش سنتی فنر یالی باتینا (Batina) [۱] به همراه فنرهای خطی اضافی است که سختی سیستم را افزایش می‌دهند، به طوری که این فنرها در برابر تولید المان‌های نادرست مقاومت می‌کنند. برای توضیح دادن این روش ابتدا می‌بایست اصطلاح "گوی" هر رأس (the ball of a mesh vertex) را تعریف کنیم: گوی رأس \mathbf{i} ، شکلی است که از کنار هم قرار گرفتن یال‌ها (در حالت دو بعدی) و یا سطوح مثلثی شکلی (در حالت سه بعدی) تشکیل می‌شود که رئوس خود آن‌ها (یال‌ها و یا سطوح مثلثی شکل) به وسیله یال‌هایی به رأس \mathbf{i} متصل هستند. شکل (الف)، گوی رأس \mathbf{i} را در حالت دو بعدی و برای یک مش ساده نشان می‌دهد؛ در این شکل، گوی رأس \mathbf{i} از کنار هم قرار گرفتن یال‌هایی با نام‌های \mathbf{E}_1 تا \mathbf{E}_5 تشکیل شده است. در شکل (ب) گوی رأس \mathbf{i} برای یک شبکه دو بعدی غیر ساده (Non-Simplicial)، نشان داده شده است. توجه داشته باشید که در

می‌خواهیم تغییر شکل دادن یک مش را بررسی کنیم: در این مسأله حوزه حلی که می‌خواهد تغییر شکل دهد با نماد Ω مشخص شده است. آرایش مکانی حوزه حل کشسان را می‌توان تحت تأثیر جابجایی‌های اعمالی و پس از تغییر شکل محاسبه کرد. در حالت کلی، مرز حوزه حل Γ را می‌توان به قسمت‌های متعارف ذیل تقسیم کرد [۵]:

$$\Gamma = \Gamma_m + \Gamma_0 + \Gamma_s \quad (1)$$

مرز متحرک حوزه حل با Γ_m نمایش داده می‌شود، مقدار جابجایی بر روی Γ_m معلوم بوده و به صورت ذیل است:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{g} \quad \forall i \in \{V\}_{\Gamma_m} \quad (2)$$

که \mathbf{u}_E بیانگر مقدار جابجایی اعمال شده به رئوس مرزی مورد نظر است. قسمتی از مرز که هیچ جابجایی به آن اعمال نمی‌شود، خود به دو قسمت کوچکتر تقسیم می‌شود: Γ_0 و Γ_s که به ترتیب معرف مرزهای ساکن و لغزشی هستند:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_0 \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_s \quad (3)$$

که \mathbf{n} بیانگر بردار نرمال محلی است. مرز بسیار دور از جسم (Far-field boundary) نمونه‌ای از Γ_0 و صفحات تقارن (Symmetry planes) نمونه‌ای از Γ_s هستند. در شبیه‌سازی یک فرآیند گذرا، شرایط مرزی که به مسأله‌ای با مش تغییر شکل‌پذیر اعمال می‌شود، بصورت تابعی از زمان است. در نتیجه در حالت گذرا، مسأله‌ی تغییر شکل مش در هر گام زمانی حل می‌گردد. اعمال شرایط مرزی بر روی Γ_0 و Γ_s مسأله‌ای با خاصیت کشسانی موهومی به دست می‌دهد که به صورت ذیل است:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_M + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_M + \mathbf{K}\mathbf{u}_M = \mathbf{B}\mathbf{g} \quad (4)$$

که \mathbf{u}_M بردار جابجایی‌های رئوس متحرک شبکه است، \mathbf{g} بردار جابجایی-های اعمال شده بر روی Γ_m است، \mathbf{K} , \mathbf{C} , \mathbf{M} به ترتیب ماتریس‌های لختی، میرایی و سختی هستند؛ با اعمال شرایط مرزی بر روی قسمت‌های مختلف مرز حوزه حل، \mathbf{B} معلوم می‌شود. در اکثر موارد و نیز در این مقاله، تنها نسخه ساکن مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرد، یعنی مشتقات زمانی \mathbf{u}_M برابر صفر در نظر گرفته شده و معادله ذیل حل می‌گردد:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_M = \mathbf{B}\mathbf{g} \quad (5)$$

این دستگاه خطی را می‌توان با روش‌های مستقیم ویا غیر مستقیم حل کرد.

همانندی فنری

آسان‌ترین و پُر استفاده‌ترین تکنیک برای تغییر شکل دادن مش، همانندی فنری است [۱]، در این تکنیک، به جای هر یال، یک فنر موهومی قرار می‌گیرد و سختی این فنر به طور معکوس متناسب با طول یالی است که جایگزین آن شده است. بنابراین فنرهای نرم‌تر جایگزین یال‌های بلندتر و فنرهای سخت‌تر جایگزین یال‌های کوتاه‌تر می‌شوند [۱].

به طور خلاصه این روش را مرور می‌کنیم: برای دو رأس \mathbf{i} و \mathbf{j} یک یال برداری از \mathbf{i} به \mathbf{j} به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \quad (6)$$

که طول آن برابر $L_{ij} = \sqrt{\mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{e}_{ij}}$ و یال برداری یکه به صورت $\mathbf{i}_{ij} = \mathbf{e}_{ij} / L_{ij}$ است. جابجایی رئوس \mathbf{i} و \mathbf{j} به صورت \mathbf{u}_i و \mathbf{u}_j نمایش داده می‌شود. نیروی برآیند وارد بر روی رأس \mathbf{i} در راستای بردار یکه بوده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

تنها تفاوت قابل توجه \mathbf{u}_p نسبت به حالت یال فنی این است که در روش کنونی \mathbf{u}_p جابجایی یک نقطه مجازی است. جابجایی نقطه \mathbf{p} (تصویر نقطه \mathbf{i}) با میانبایی کردن جابجایی انجام شده در رئوس یال \mathbf{E}_i یا رئوس سطح \mathbf{F}_i محاسبه می‌شود. در حالت دوم، موقعیت نقطه \mathbf{p} به صورت تصویر عمودی \mathbf{i} بر روی \mathbf{F}_i به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (13)$$

که

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i}_{jk} \times \mathbf{i}_{ji}}{\|\mathbf{i}_{jk} \times \mathbf{i}_{ji}\|} \quad (14)$$

بردار یکه سطح \mathbf{F}_i است. به ازای یک \mathbf{x}_p معلوم، ضرایب میانبایی ξ و η مربوط به نقطه \mathbf{p} بصورت ذیل محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{x}_p = \xi \mathbf{x}_j + \eta \mathbf{x}_k + (1 - \xi - \eta) \mathbf{x}_i \quad (15)$$

در صورتی که تصویر رأس \mathbf{i} خارج از سطح هدف قرار گرفت، نیاز به انجام عمل بخصوصی نیست. با محاسبه ξ و η از معادله فوق داریم:

$$\xi = \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^2} \quad (16 \text{ الف})$$

$$\eta = \frac{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|^2} \quad (16 \text{ ب})$$

در نهایت، پس از محاسبه ξ و η در بالا، جابجایی در \mathbf{p} ، به صورت ذیل میانبایی می‌گردد:

$$\mathbf{u}_p = \xi \mathbf{u}_j + \eta \mathbf{u}_k + (1 - \xi - \eta) \mathbf{u}_i \quad (17)$$

به طور مشابه، نیروی ناشی از فنر که به نقطه \mathbf{p} وارد می‌شود، به طور خطی میان رئوس \mathbf{j} ، \mathbf{k} و \mathbf{i} که سطح \mathbf{F}_i را احاطه کرده‌اند، توزیع می‌شود (شکل ۲(ج) یا (د)). کار مجازی فنر میان \mathbf{i} و \mathbf{p} ، به علت تغییر مکان بینهایت کوچک دو نقطه انتهایی‌اش به صورت ذیل است:

$$\delta W_{ip} = -\mathbf{f}_{ip} \cdot \delta \mathbf{u}_i - \mathbf{f}_{pi} \cdot \delta \mathbf{u}_p \quad (18)$$

که $\delta \mathbf{u}_p$ تغییر مجازی معادله (۱۷) است. در نتیجه نیروهایی که این فنر به رئوس \mathbf{j} ، \mathbf{k} و \mathbf{i} سطح \mathbf{F}_i اعمال می‌کند، عبارتند از:

$$\mathbf{f}_{ip,j} = \xi \mathbf{f}_{ip} \quad (19 \text{ الف})$$

$$\mathbf{f}_{ip,k} = \eta \mathbf{f}_{ip} \quad (19 \text{ ب})$$

$$\mathbf{f}_{ip,i} = (1 - \xi - \eta) \mathbf{f}_{ip} \quad (19 \text{ ج})$$

موقعیت هر رأس با نوشتن معادلات تعادل آن تحت تأثیر تمامی نیروهای ناشی از فنرها تعیین می‌گردد. برای خاتمه دادن به این مبحث، ابتدا ماتریس سختی \mathbf{K}_{ip} را که متأثر از تنها یک فنر است، می‌نویسیم. با استفاده از قانون کار مجازی (۱۸) \mathbf{K}_{ip} به سادگی محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}_{ip} = \mathbf{k}_{ip} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & -\xi^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & -\eta^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & -(1-\xi-\eta)^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T \\ -\xi^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & \xi \eta^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & \xi (1-\xi-\eta)^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & \\ & \eta^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & \eta (1-\xi-\eta)^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T & \\ \text{symm.} & & & \eta (1-\xi-\eta)^2 \mathbf{i}_{ip} \mathbf{i}_{ip}^T \end{bmatrix} \quad (20)$$

سپس ماتریس سختی کلی که تحت تأثیر یال مجازی \mathbf{ip} قرار دارد، به صورت ذیل محاسبه می‌گردد:

حالت غیر ساده، اجزای تشکیل‌دهنده گوی \mathbf{i} (یال‌های \mathbf{E}_1 ، \mathbf{E}_2 و \mathbf{E}_3)، قسمتی از مش اصلی نیستند؛ به همین دلیل در داخل شکل، به صورت نقطه‌چین نشان داده شده‌اند. در شکل ۱(ج)، گوی رأس \mathbf{i} برای یک شبکه چهار وجهی با وجوه مثلثی نشان داده شده است در حالی که در شکل ۱(د)، گوی رأس \mathbf{i} برای یک شبکه شش وجهی با وجوه مربعی به تصویر در آمده است. در این حالت نیز یال‌های تشکیل‌دهنده گوی، جزئی از مش نیستند و به همین جهت در داخل شکل به صورت نقطه‌چین نشان داده شده‌اند.

هم در حالت دو بعدی و هم در حالت سه بعدی، هم برای مش‌های ساده و هم برای مش‌های غیر ساده، اگر تنها یکی از رئوس یک المان، گوی مربوط به خود را ترک کند، کل آن المان نادرست (invalid) می‌شود. اگر چنین وضعیتی برای یک مش ساده رخ دهد، سبب می‌شود که مساحت (در حالت دو بعدی) یا حجم (در حالت سه بعدی) آن المان تغییر علامت دهد و اگر برای یک مش غیر ساده چنین وضعیتی واقع شود، سبب می‌گردد که آن المان مقعر شود، یعنی زاویه‌ای (یا در حالت سه بعدی یک زاویه بین سطحی) بزرگتر از π داشته باشد.

حال مفهوم فنر گوی-رأسی را معرفی می‌کنیم: در حالت دو بعدی، تعدادی فنر خطی معرفی می‌کنیم که در برابر حرکت یک رأس به سمت یال مقابلش مقاومت می‌کنند. در شکل ۲(الف) یک المان سه ضلعی نشان داده شده است، در این حالت، یال \mathbf{E}_i که در مقابل رأس \mathbf{i} قرار دارد، یک یال مشی (the mesh edge) است. در شکل ۲(ب) یک المان چهار ضلعی نشان داده شده است، در این شکل یالی که در مقابل رأس \mathbf{i} قرار دارد، یک یال قطری (the diagonal edge) است و به صورت نقطه‌چین نشان داده شده است. بطور خلاصه، در حالت دو بعدی در هر سطحی از مش همانند \mathbf{F} ، و برای هر رأسی همانند \mathbf{i} ، یک فنر خطی در نظر گرفته می‌شود که \mathbf{i} را به تصویر آن بر روی یال \mathbf{E}_i (که قسمتی از گوی \mathbf{i} است)، یعنی نقطه \mathbf{p} متصل می‌کند.

چنین وضعیتی در حالت سه بعدی نیز وجود دارد. در شکل ۲(ج) یک المان چهار وجهی با وجوه مثلثی و در شکل ۲(د) یک المان شش وجهی با وجوه مربعی نشان داده شده است. در حالت سه بعدی، در هر ناحیه‌ای همانند \mathbf{R} ، و برای هر رأسی همانند \mathbf{i} ، یک فنر خطی در نظر گرفته می‌شود که \mathbf{i} را به تصویر آن بر روی سطح مثلثی شکل \mathbf{F}_i (که قسمتی از گوی \mathbf{i} است)، یعنی نقطه \mathbf{p} متصل می‌کند. توجه داشته باشید که در هر دو حالت دو بعدی و سه بعدی، ممکن است نقطه \mathbf{p} در خارج از یال یا سطح مقابل رأس \mathbf{i} قرار بگیرد. موقعیت هر رأس با نوشتن معادلات تعادل آن تحت تأثیر فنرهای گوی-رأسی تعیین می‌گردد. برای این منظور، فنرهای سطح-رأسی (the face-vertex springs) نشان داده شده در شکل ۲ را در نظر بگیرید. اگر \mathbf{u}_i و \mathbf{u}_p نشان دهنده جابجایی‌های رأس \mathbf{i} و تصویر آن بر روی \mathbf{E}_i یا \mathbf{F}_i باشند، برآیند نیروها بر روی \mathbf{i} و \mathbf{p} را می‌توان بصورت ذیل بیان کرد:

$$\mathbf{f}_{ip} = \mathbf{k}_{ip} (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{i}_{ip} \cdot \mathbf{i}_{ip} = -\mathbf{f}_{pi} \quad (11)$$

که \mathbf{i}_{ip} بردار یکه در راستای فنر است و به صورت $\mathbf{i}_{ip} = \mathbf{e}_{ij} / L_{ip}$ محاسبه می‌شود در حالی که:

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i \quad (12)$$

و طول یال نیز به وسیله رابطه $L_{ip} = \sqrt{\mathbf{e}_{ip} \cdot \mathbf{e}_{ip}}$ محاسبه می‌شود. علاوه بر این، \mathbf{k}_{ip} سختی فنر است؛ در این مقاله، سختی فنر به طور معکوس متناسب با طول یال است، $\mathbf{k}_{ip} = 1 / L_{ip}$ ، اگر چه که انتخاب‌های دیگری نیز امکان پذیر است.

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & K_{ii} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{ji} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & K_{ji} & \dots & K_{jj} & \dots & K_{ji} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & K_{ji} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ u_j \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (21)$$

که هر K_{ij} نشان دهنده یک ماتریس بلوکی 2×2 در حالت دو بعدی یا یک ماتریس بلوکی 3×3 در حالت سه بعدی است.

در نهایت، سهم فنرهای یالی (معادله ۱۰) و فنرهای سطحی (معادله ۲۱) با یکدیگر جمع می‌شوند تا ماتریس ضرایب کلی حاصل گردد. روش گوی رأسی را می‌توان به جای ترکیب کردن با روش سنتی یال فنری، به تنهایی نیز به کار برد. اما روش ما در این مقاله بر مبنای ایده استفاده همزمان از فنرهای خطی یالی و فنرهای خطی یالی-رأسی در مسایل دو بعدی است. این فنرهای اضافه شده، بطور موثری با مکانیزم‌های فروپاشی احتمالی المان‌های شبکه مقابله می‌کنند و هر رأس را مجبور می‌کنند که در داخل گوی چند وجهی که آن را احاطه کرده، باقی بماند. به علاوه، حضور فنرهای اضافی، کیفیت مش را بالا می‌برد زیرا این فنرها مراقب هستند که هر رأس در نزدیکی مرکز گوی و دور از مرزهای آن باقی بماند.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی

همانطور که پیش از این نیز گفته شد، در این مقاله با ترکیب روش سنتی همانند فنری و روش جدید گوی-رأسی، مش اولیه را تغییر شکل می‌دهیم. به همین جهت ضروری است که ابتدا مش دست نخورده اولیه را توصیف کنیم: این مش که پیرامون یک هواپرنه ناکا ۰۰۱۵ (NACA0015) زده شده است، دارای مرزی A-شکل (O-grid) است (شکل ۳) و برای جریان آرام یک مش لزوج محسوب می‌شود (شکل ۴ (الف) و (ب)).

برای بررسی و مقایسه کیفیت مش‌ها قبل و بعد از تغییر شکل، معیار اسکوینس (Skewness) را معرفی می‌کنیم. اسکوینس یک سلول چهار ضلعی، از رابطه ذیل محاسبه می‌شود:

$$Skewness = \max \left[\frac{\theta_{max} - 90}{90}, \frac{90 - \theta_{min}}{90} \right] \quad (22)$$

که در آن θ_{min} و θ_{max} به ترتیب بزرگترین و کوچکترین زاویه‌ی چهار ضلعی مورد نظر هستند [۶]. بر اساس این رابطه هرچه اسکوینس یک سلول به صفر نزدیکتر باشد، آن سلول به شکل مربع نزدیکتر است.

حال تغییر کیفیت مش را در اثر جابجایی، دوران، و ایجاد شکستگی در هواپرنه بررسی می‌کنیم. در تمامی این موارد با ارائه نمودار اسکوینس سلول‌هایی که در مجاورت هواپرنه قرار دارند (فقط سلول‌های ردیف اول یا $J=1$)، روش یال فنری را با ترکیب روش‌های یال فنری و گوی-رأسی مقایسه می‌کنیم. علت انتخاب سلول‌های ردیف اول آن است که با تغییر شکل مش، اسکوینس این سلول‌ها بیشتر از سلول‌های دیگر تغییر می‌کند و در نتیجه بهتر از دیگر سلول‌ها می‌توانند برتری روشی را بر دیگری نشان دهند.

هم اکنون لازم است توضیحاتی را ارائه کنیم که در تمامی شکل‌های ۵ تا ۷ برقرارند: در این شکل‌ها محور افقی I نشان دهنده شماره سلول در راستای I است که راستای I موازی با سطح هواپرنه و راستای J عمود بر سطح آن انتخاب شده است؛ به طوری که مکان نقطه (۱و۱) در لبه فرار بوده، و مقدار I در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، افزایش می‌یابد. تعداد سلول‌هایی که در راستای I قرار دارند ۱۵۹ عدد است، بنابراین سلول

(۱و۱) در لبه حمله و سلول (۱۵۹و۱) مجدداً بر روی لبه فرار قرار می‌گیرد. در این نمودارها اسکوینس سلول (۱و۱۵۹) به دلیل تشابه با سلول (۱و۱) ذکر نشده است. در نمودارهای اسکوینس منظور از حرف اختصاری E روش یال فنری می‌باشد در حالی که E+B بیانگر ترکیب روش‌های یال فنری و گوی-رأسی است.

در شکل ۵ هواپرنه به اندازه ۱،۰۹۵ برابر طول وترش و در جهت +Y (این راستا در شکل ۳ نشان داده شده است) جابجا شده است ($uY=1.095 C$). با توجه به شکل ۵ بیشتر از نصف سلول‌هایی که با روش یال فنری ایجاد شده‌اند، نسبت به سلول‌هایی که از ترکیب روش‌های یال فنری و گوی-رأسی به دست آمده‌اند، کیفیت بالاتری دارند چراکه اسکوینس کوچکتری دارند. نتیجه آن که برای جابجایی هواپرنه، روش یال فنری بهتر از روش ترکیبی یال فنری و گوی-رأسی عمل می‌کند.

اما این مطلب در مورد دوران یک هواپرنه صحیح نیست. همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌کنید، به ازای دورانی کوچک و به اندازه تنها ۳، درجه اختلاف شدیدی میان روش یال فنری و روش ترکیبی یال فنری و گوی رأسی بروز می‌کند. با استفاده از روش ترکیبی، می‌توان هواپرنه را تا زوایایی به بزرگی ۱۴ درجه نیز دوران داد؛ البته در چنین زاویه‌ای مقادیر اسکوینس چندان کوچک نیست (شکل ۶).

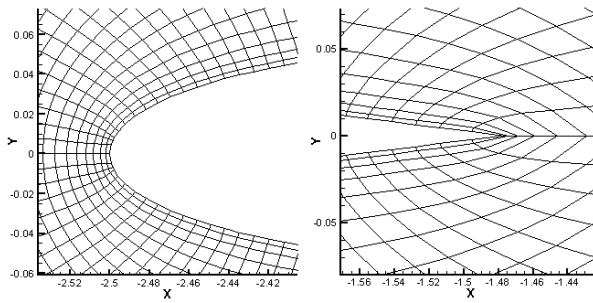
انعطاف نسبتاً زیادی که روش ترکیبی در مسأله دوران از خود نشان داد ما را بر آن داشت که حالتی را بررسی کنیم که در آن قسمتی از هواپرنه دچار شکستگی می‌شود. این شکستگی در نقطه‌ای رخ می‌دهد که از لبه فرار، به اندازه ۰،۳۶۲ برابر وتر فاصله دارد. در این حالت قسمتی از هواپرنه که در فاصله مابین نقطه شکستگی و لبه فرار قرار دارد به اندازه مشخصی حول نقطه شکستگی دوران می‌کند در حالی که مابقی هواپرنه ساکن است. شکل ۷ نشان می‌دهد که روش یال فنری به ازای شکستگی ۴ درجه مقادیر اسکوینس نسبتاً بزرگی را به دست می‌دهد حال آنکه روش ترکیبی به ازای همین مقدار شکستگی، مشی با کیفیت بسیار بالا ارائه می‌کند؛ و حتی در شکستگی ۸ درجه (دو برابر حالت قبلی) نیز مش قابل قبولی (بجز سلول‌هایی که در مجاورت $I=140$ قرار دارند) تولید می‌کند.

در انتها لازم به یادآوری است که در این مقاله از مش اولیه‌ای استفاده شده است که برای جریان آرام یک مش لزوج محسوب می‌شود، به همین جهت مقادیر جابجایی، دوران و شکستگی هواپرنه چندان بزرگ نیستند؛ در حالی که برای یک مش اولیه غیر لزوج می‌توان به راحتی به مقادیر بزرگتری (در هر دو روش ترکیبی و یال فنری) دست یافت.

نتیجه‌گیری

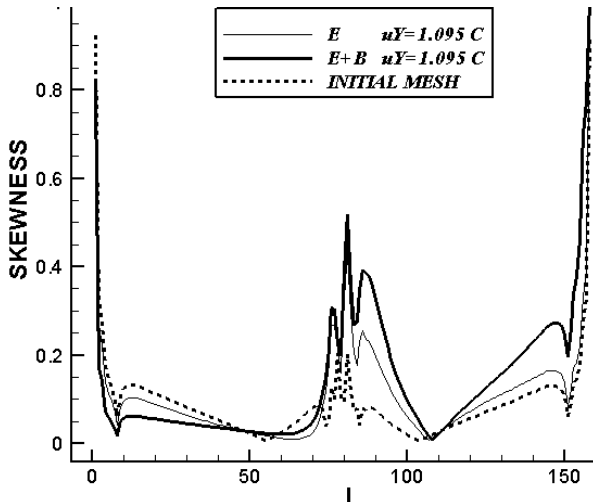
با ترکیب روش یال فنری و گوی-رأسی می‌توان سختی کلی شبکه مش-بندی را که متشکل از فنرهای موهومی است، افزایش داد. اما این افزایش سختی بهبود کیفیت مش تغییر شکل یافته را در تمامی مسایل تضمین نمی‌کند. هنگامی که در مرزهای حوزه حل با حرکات دورانی مواجه هستیم، روش ترکیبی بهتر از روش سنتی یال فنری عمل می‌کند؛ اما در مواردی که مرزها حرکت انتقالی دارند روش یال فنری عملکرد بهتری دارد. در حرکت دورانی مرزها، کیفیت مش‌های تغییر شکل یافته به وسیله دو روش اختلاف شدیدی با یکدیگر دارند؛ حال آنکه وقتی مرزها حرکت انتقالی دارند، کیفیت مش حاصل از روش یال فنری تنها کمی بهتر از مش روش ترکیبی است.

شکل‌ها و نمودارها

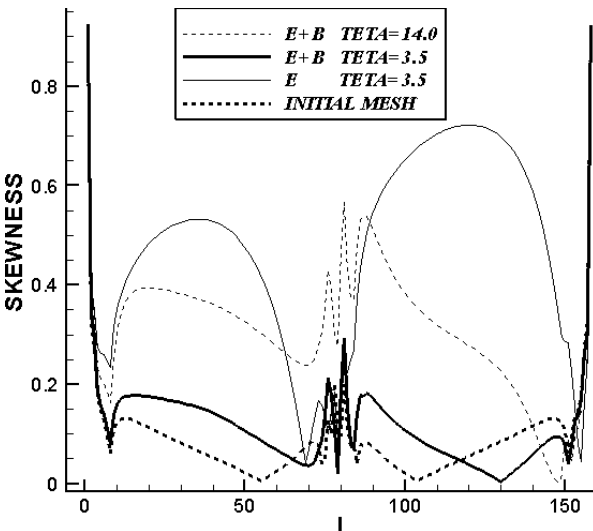


(الف): لبه فرار (ب): لبه حمله

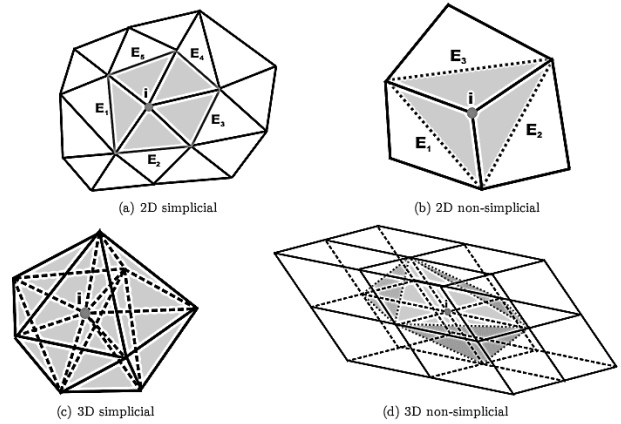
شکل ۴: مش لزوج برای جریان آرام پیرامون لبه فرار (الف) و لبه حمله (ب) هواپرن ناکا ۰۰۱۵.



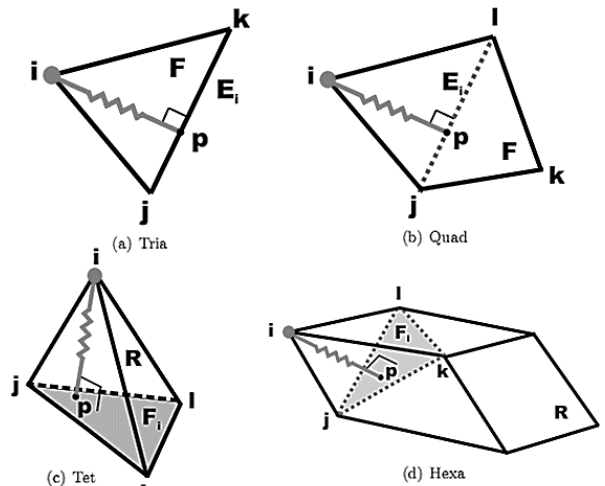
شکل ۵- مقایسه اسکویننس سلول‌های مجاور هواپرن (J=1) در سه حالت مش اولیه، مش ثانویه حاصل از روش یال فنی (E) و مش ثانویه حاصل از روش ترکیبی یال فنی و گوی-راسی (E+B) پس از جابجایی هواپرن.



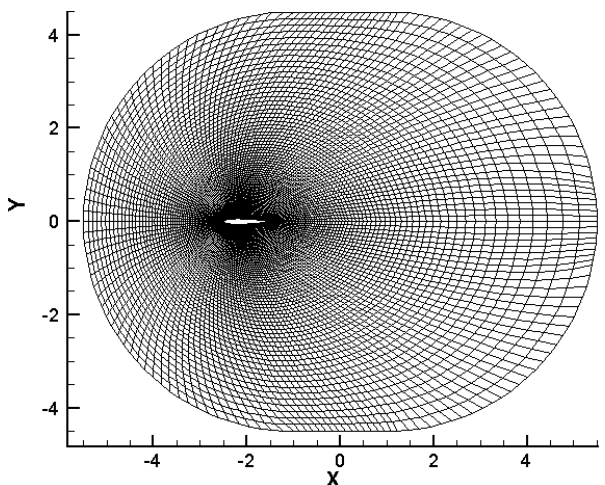
شکل ۶- چگونگی تغییرات اسکویننس سلول‌های مجاور هواپرن (J=1) قبل و بعد از دوران آن. (E) بیانگر مش حاصل از روش یال فنی و (E+B) نمایانگر مش حاصل از ترکیب روش یال فنی و گوی-راسی است.



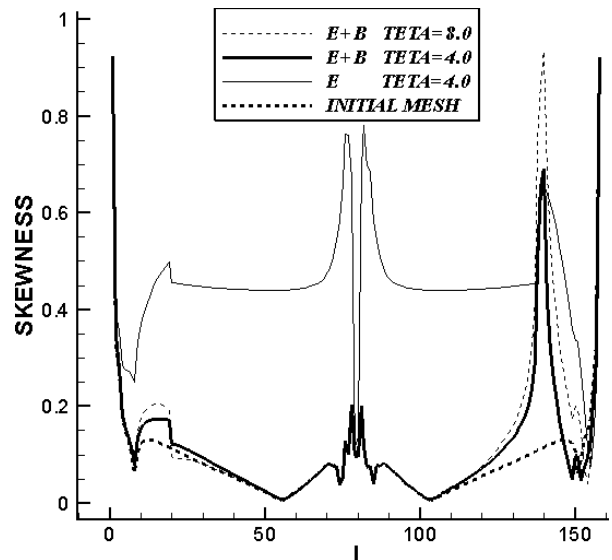
شکل ۱: گوی‌های رأس \bar{i} در حالت دو بعدی (ردیف بالا) برای مش‌های ساده (الف) و غیر ساده (ب)، و در حالت سه بعدی (ردیف پایین) برای مش‌های ساده (ج) و غیر ساده (د).



شکل ۲: فنرهای گوی-راسی برای مش‌های دو بعدی (ردیف بالا) سه ضلعی (الف)، چهار ضلعی (ب)، و سه بعدی (ردیف پایین) چهار وجهی با وجوه مثلثی (ج) و شش وجهی با وجوه مربعی (د).



شکل ۳: مرز آ-شکل شبکه مش پیرامون هواپرن ناکا ۰۰۱۵.



شکل ۷- مقادیر اسکویینس سلول‌های مجاور هواپُر (J=1) برای حالتی که در آن قسمت انتهایی هواپُر (به طول ۰.۳۶۲، برابر وتر) دچار شکستگی شده و به مقدار مشخصی دوران می‌کند.

مراجع

۱. Batina J., Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. Tech. Rep. AIAA 89-0150, 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, 1989.
۲. Degand C., and Farhat C., A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes. Computers and Structures, v. 80, 2002, pp. 305–316.
۳. Farhat C., Degand C., Koobus B., and Lesoinne M., Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 163, 1998, pp. 231–2450.
۴. Bar-Yoseph P., Mereu S., Chippada S., and Kalro V., Automatic monitoring of element shape quality in 2-d and 3-d computational mesh dynamics. Computer Mechanics, v. 27, 2001, pp. 378–395.
۵. Bottasso C.L., Detomi D., and Serra R., The ball-vertex method: A new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 194, 2005, pp. 4244-4264.
۶. <http://www.wikipedia.org>