

ISME2015-10102520774

بررسی طرح های بالادست AUSM+، تفاضل مرکزی کاسپ و اسکالر در جریانهای بابازه ماخ های بسیار کم تا ماوراء صوت

فهیمه ابراهیم زاده ازغدی¹، محمود پسندیده فرد²، محمدرضا مه پیکر³

¹دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، ebrahimzadeh.f2@gmail.com

²دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، fard_m@um.ac.ir

³استاد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، mahpeymr@um.ac.ir

چکیده

در این مقاله به مقایسه عملکرد روش بالادست AUSM+ و طرح های اتلافی کاسپ و اسکالر، در حل معادلات اویلر برای جریانهای تراکم پذیر داخلی پرداخته شده است. برای داشتن چنین حلی ابتدا معادلات به فرم انتگرالی نوشته شده سپس در روش های کاسپ و اسکالر به کمک طرح تفاضل مرکزی و در روش AUSM+ به کمک طرح تفاضل بالادست به صورت انفصالی درآمده اند. مشکل اساسی در روش تفاضل مرکزی در حل این معادلات، ناپایداری و ناپیوستگی حل که به علت پدیده شوک اتفاق می افتد، می باشد که ناشی از استفاده نادرست اطلاعات طرفین شوک است. برای رفع این مشکل از طرح های اتلاف مصنوعی استفاده می شود که خود از عوامل تولید خطا می باشد. درحالی که در روش های بالادست که بر پایه پخش اطلاعات جریان در امتداد جهات مشخصه در دامنه فیزیکی استوارند، این مشکل برطرف می شود. در این تحقیقتوانایی این سه روش در محدوده ماخ های کم تا ماوراء صوت بررسی می شود و شاهد عملکرد خوب روش AUSM+ در تمامی شرایط خواهیم بود.

واژه های کلیدی

طرح کاسپ- اتلاف مصنوعی اسکالر- AUSM+ - جریان تراکم پذیر داخلی

مقدمه

از آنجا که طرح های تفاضل مرکزی اتلافات¹ ناچیز دارند لذا اتلافات مصنوعی² به منظور از بین بردن نوسانات به معادلات اضافه می گردد، که سهم مهمی در تولید خطا و یا دقت حل معادلات ایفا می کنند. پایه و اساس طرح های انفصالی غیر نوسانی در دو دهه اخیر گذاشته شده است. یکی از اولین طرح های پیشنهادی توسط جیمسون ارائه شد. در این شکل از اتلاف مصنوعی، ترکیبی از جملات اتلافی مرتبه دوم و چهارم وجود دارد [1]. این طرح اگرچه در آن زمان بسیار موفق بود ولی لزجت مصنوعی بسیار زیادی به معادلات اضافه می کرد.

در تعیین جملات اتلافی باید بسیار دقت کرد زیرا افزودن اتلاف بیش از حد باعث ایجاد گرادیان های تند می شود. بنابراین باید ضرایب اتلافی را در پایین ترین حد ممکن انتخاب کرد تا فقط بتواند نوسانات را مستهلک کند. بر این اساس اخیراً جیمسون طرح اتلافی کاسپ را معرفی کرد [2].

به طور کلی طرح های تفاضل مرکزی بر پایه تخمین متقارنی از اطلاعات ذخیره شده در نقاط مجاور سطح سلول می باشد بنابراین، جهتی را که اطلاعات از آن جهت به سلول می رسند، در نظر نمی گیرند و از ماهیت هذلولی مسائل صرف نظر می کنند. روش های بالا دست بر پایه پخش اطلاعات جریان در امتداد جهات مشخصه در دامنه فیزیکی استوارند، از این رو تطابق خوبی با فیزیک جریان در سراسر میدان دارند، از طرف دیگر روش های پیچیده در هنگام برنامه نویسی هستند و نیازمند حافظه بیشتری جهت تعیین سرعت امواج صوتیکه جهت پخش اطلاعات را تعیین می کنند، می باشند.

امروزه تلاش در توسعه الگوریتم های بالا دست مبتنی بر استفاده از تجزیه شارها می باشد که هدف ترکیب دقت الگوریتم های بالا دست از نوع اختلاف شار و توانایی الگوریتم های بالا دست از نوع تجزیه بردار شار در گرفتن ناپیوستگی های قوی میدان جریان می باشد. روش های خانواده AUSM³ با توجه به این ایده در سال 1991 توسط لیو خلق و توسعه یافته اند. [3].

در این مقاله پس از ارائه طرح های اسکالر، کاسپ و AUSM+ به بررسی آنها و نتایج حاصل در حل معادلات جریان داخل شیبوره، در محدوده ماخ های مختلف می پردازیم.

معادلات حاکم

معادلات حاکم بر جریان، معادلات اویلر هستند که برای سادگی، معادلات را برای یک جریان یک بعدی در نظر می گیریم. شکل کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

که در آن w مولفه های جریان و $f(w)$ بردار شار می باشد.

$$w = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad f(w) = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u H \end{Bmatrix} \quad (2)$$

³Advection Upstream Splitting Method

¹Dissipation

²Artificial Dissipation

ρ دانسیته، u سرعت، E انرژی کل، P فشار و H آنتالپی سکون می باشد.

معادله (1) را می توان به شکل زیر منفصل کرد:

$$\Delta x \frac{dw_i}{dt} + h_{i+1/2} - h_{i-1/2} = 0 \quad (3)$$

که در آن $h_{i+1/2}$ شار عددی بین سلول i و $i+1$ می باشد. پس از به دست آوردن معادلات، آنها را با استفاده از روش حجم کنترل و به کمک طرح گام زمانی رانگ کوتاه حل می نماییم [4].

طرح اتلاف مصنوعی اسکالر^f (scds)

در این طرح شار عددی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$h_{i+1/2} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) - d_{i+1/2} \quad (4)$$

f_i بردار شار برای سلول i می باشد و $d_{i+1/2}$ شار اتلافی است که به صورت زیر تعریف می گردد [1]:

$$d_{i+1/2} = \varepsilon_{i+1/2}^2 \Delta w_{i+1/2} - \varepsilon_{i+1/2}^4 (\Delta w_{i+3/2} - 2\Delta w_{i+1/2} + \Delta w_{i-1/2}) \quad (5)$$

روابط حاکم در طرح اسکالر به گونه ای است که در نزدیکی شوک جملات مرتبه دوم مقدار بیشتری اتلاف به معادلات می افزاید و در مابقی میدان جریان مقدار بسیار کمتری به معادلات افزوده می شود. در عوض ε^4 در نزدیکی شوک که معرف جملات مرتبه چهار می باشد به سمت صفر میل می کند در حالی که در نواحی عاری از شوک مقدار قابل ملاحظه ای دارد.

طرح اتلاف مصنوعی کاسپ^a (cusp)

اساس این طرح، جدا کردن جملات فشار در روابط شار جریان می باشد. بردار شار به دو جمله جابه جایی و فشار تجزیه می شود [2]:

$$f = u \cdot w + f_p \quad (6)$$

با در نظر گرفتن روابط (2) مقدار بردار f_p به صورت زیر نتیجه می شود:

$$f_p = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ u \cdot P \end{pmatrix} \quad (7)$$

جمله اتلافی در این طرح به شکل زیر تعریف می گردد:

(8)

برای این که بتوان جواب دقیقتری گرفت باید جملات اتلاف مصنوعی در نزدیکی شوک ها با مقدار بیشتر و در مابقی میدان حل با مقدار کمتر وارد حل شوند. به این منظور یک تابع سوئیچ $L(u, v)$ که قابلیت شناسایی جریان را دارد وارد محاسبات می شود.

$$L(u, v) = \frac{1}{2} \left(1 - \left| \frac{u-v}{|u|+|v|} \right|^q \right) \quad (9)$$

مقدار توان q انتخابی است و بین 2 تا 3 می باشد. حال باید w_{i+1} و w_i را با مقادیر جدید w_L و w_R جایگزین نمود.

روش بالادست AUSM+

این روش در سال 1996 توسط لیو با ایجاد تغییراتی در الگوریتم پایه روش AUSM ارائه شد. در این روش مشکل پایداری عددی که در روش های پیش از این وجود داشت رفع گردیده است. الگوریتم AUSM+ با تعریف سرعت صوت در وجه سلول دقت و توانایی حل درگرفتن ناپیوستگی های قوی را در جریان دائم و غیر دائم بالا می برد [5].

پایه اصلی روش بر تقسیم شار به دو قسمت جا به جایی و فشاری می باشد. نحوه گسسته سازی شار کلی در وجه سلول در حالت دو بعدی، به شکل زیر است:

$$F_K = \begin{cases} \rho_L \xi_a \bar{M}_K \phi_L + g P_K & \text{if } M_K \geq 0 \\ \rho_R \xi_a \bar{M}_K \phi_R + g P_K & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

$$g = [0, n_x, n_y, 0]^T \phi = [1, u, v, H]^T$$

که \bar{a} در آن مقدار عددی سرعت صوت را نشان می دهد که در اعداد ماخ پایین جایگزین سرعت صوت متوسط می شود [6].

ξ_a معکوس بردار قائم بر سطح سلول می باشد. سرعت صوت متوسط در وجه سلول به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\bar{a} = \frac{a_L + a_R}{2} \quad (11)$$

ماخ انتقال دهنده اطلاعات به صورت تابع وزنی از مجموع عدد ماخ چپ و راست وجه سلول محاسبه می گردد:

$$M_K = M_L^+ + M_R^- \quad (12)$$

$$M_{R,L} = \frac{V_{K1}}{\bar{a} \xi_a} \quad (13)$$

P^\pm نیز تابعی از اعداد ماخ چپ و راست بوده و به صورت زیر بیان می گردند:

$$F_K = P^+ P_L + P^- P_R \quad (14)$$

$$\begin{cases} M^+ = M_{2L}, P^+ = P_{5L} & \text{if } |M_L| < 1 \\ M^+ = M_{1L}, P^+ = \frac{M_{1L}}{M_L} & \text{else} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} P^- = M_{2R}, P^- = P_{5R} & \text{if } |M_R| < 1 \\ P^- = M_{1R}, P^- = \frac{M_{1R}}{M_R} & \text{else} \end{cases} \quad (16)$$

$M_{1,2L,R}$ چند جمله ای های درجه دوم از اعداد ماخ چپ و راست هستند که به صورت زیر معرفی می شوند:

$$M_{2R} = -\frac{1}{4}(M_R - 1)^2 M_{2L} = \frac{1}{4}(M_L + 1)^2 \quad (17)$$

$$M_{1K} = \min(M_K, 0) M_{1L} = \max(M_L, 0) \quad (18)$$

$P_{5L,R}$ نیز به صورت چند جمله ای درجه پنجم $M_{L,R}$ بیان می شوند:

$$P_{5L} = +M_{2L}(2 - M_L) + \frac{3}{16} M_L(M_L^2 - 1)^2 \quad (19)$$

$$P_{5R} = -M_{2R}(2 + M_R) - \frac{3}{16} M_R(M_R^2 - 1)^2 \quad (20)$$

ضریب 3/16 همان ضریب β است که در کد و نوساناتی که در هنگام شوک رخ می دهد تاثیر بسزایی دارد و از این رو در مورد محدوده ISME2015.1394 اردی بهشت 24-22

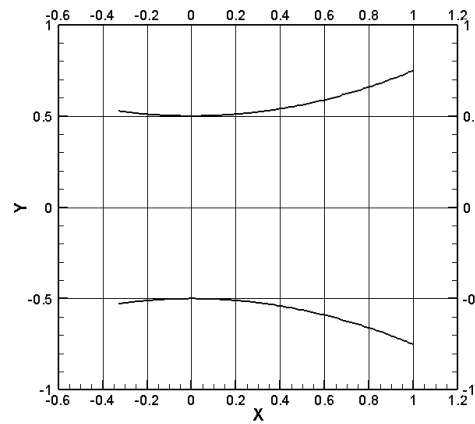
⁴Scalar Dissipation Scheme

⁵Convective Upwind and Split Pressure

انتخابی بایستی دقت کافی داشت. محدوده به صورت $3/16 < \beta < -3/16$ می باشد [6].

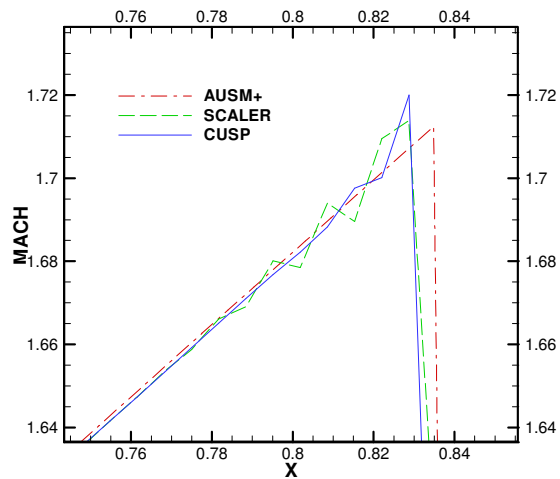
بحث و بررسی نتایج

در کار حاضر معادله اوایل درون یک شیپوره با استفاده از روش های اسکالر، کاسپ و AUSM+ حل و بررسی شده اند. شکل 1 شیپوره مورد بررسی با معادله منحنی $y = 0.25x^2 + 0.5$ و $\frac{A}{A^*} = 1.5$ را نشان می دهد:



شکل 1- شکل هندسه شیپوره بررسی شده

اگر نسبت فشار پشت به فشار ورودی 0.7 در نظر گرفته شود، عدد ماخ در شیپوره به حدود 1.7 می رسد و سپس یک شوک عمودی رخ می دهد. در این حالت ظاهراً هر سه روش جواب قابل قبولی به ما می دهند، ولی اگر با دقت بیشتری، در نزدیکی شوک به شکل 2 نگاه شود متوجه می شویم که روش اسکالر نوسان بیشتری در مقابل روش کاسپ دارد، در حالی که روش AUSM+ هیچ گونه نوسان از خود نشان نمی دهد.



شکل 2- تغییرات عدد ماخ در نزدیکی شوک (n=200)

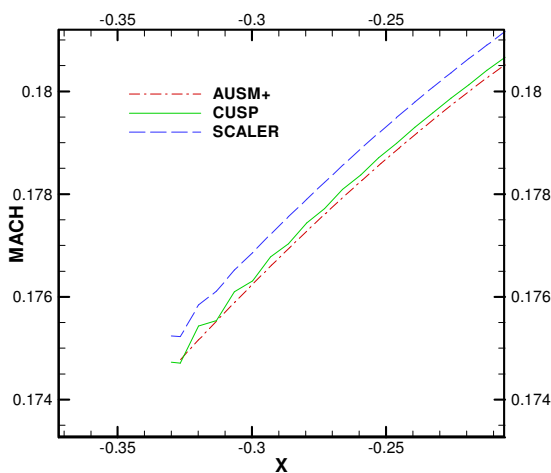
محل شوک و عدد ماخ قبل و بعد از شوک پیش بینی شده در این موقعیت، توسط سه روش ذکر شده و مقایسه آنها با داده های تئوری

نیز در جدول (1) آمده است. همان طور که این جدول نیز نشان می دهد ضخامت شوک پیش بینی شده توسط روش AUSM+ کمترین است و از این نظر ارجح است و با توجه به نتایج تئوری دقت بیشتری در محل شوک، مقدار عدد ماخ قبل و بعد از شوک نیز دارد.

جدول 1: مقایسه M_2 و M_1 ، شروع و اتمام شوک در طرح های ذکر شده

تئوری	AUSM ⁺	کاسپ	اسکالر	نام طرح
0/836	0/835	0/828	0/828	شروع شوک
0/836	0/847	0/842	0/849	اتمام شوک
1/711	1/712	1/719	1/713	M_1
0/638	0/635	0/601	0/633	M_2

برای بررسی عملکرد طرح های ذکر شده در اعداد ماخ پایین نسبت فشار را برابر با 0.99 در نظر می گیریم. در این حالت نیز هر سه روش جواب های قابل قبولی ارائه می دهند اما اگر با دقت بیشتر به ابتدا و انتهای نمودار توجه شود، همان طور که در شکل (3) دیده می شود روش AUSM+ نوسانات موجود در دو روش کاسپ و اسکالر را ندارد و از این نظر ارجح است.



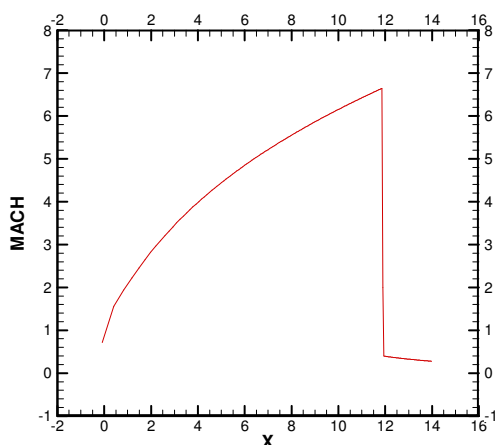
شکل 3- تغییرات عدد ماخ در ورودی شیپوره (نسبت فشار = 0.99)

به منظور رسیدن به ماخ های بالا از شیپوره با معادله منحنی $y = 0.27x^2 + 0.15$ که نسبت سطح در آن $\frac{A}{A^*} = 8.2$ می باشد، استفاده شده است. اگر نسبت فشار پشت به فشار ورودی 0.3 در نظر گرفته شود، عدد ماخ در شیپوره به حدود 3 می رسد و سپس یک شوک عمودی رخ می دهد. همان طور که در شکل 4 مشاهده می شود روش اسکالر به شدت نوسانی می شود به طوری که نمی توان مشخصات موج را با دقت خوبی از آن بدست آورد. روش کاسپ در ماخ های بالا نیز دقت کافی ندارد. این در حالی است که روش AUSM+ هیچ گونه نوسان از خود نشان نمی دهد و با توجه به نتایج تئوری دقت بیشتری در تسخیر کردن شاک، محل شوک و عدد ماخ قبل و بعد از شوک دارد. نتایج حاصل از به کار گیری سه روش ذکر شده با داده های تئوری در جدول (2) آمده است. همان طور که

جدول (2) نیز مشاهده می شود روش AUSM+ جواب هایی نزدیکتر به داده های تئوری دارد.

جدول (2): مقایسه M_1 و M_2 شروع و اتمام شوک در طرح های ذکر شده

نام طرح	اسکالر	کاسپ	AUSM+	تئوری
شروع شوک	1/476	1/476	1/395	1/391
اتمام شوک	1/511	1/488	1/438	1/391
M_1	3/540	3/467	3/050	3/061
M_2	0/410	0/488	0/461	0/472



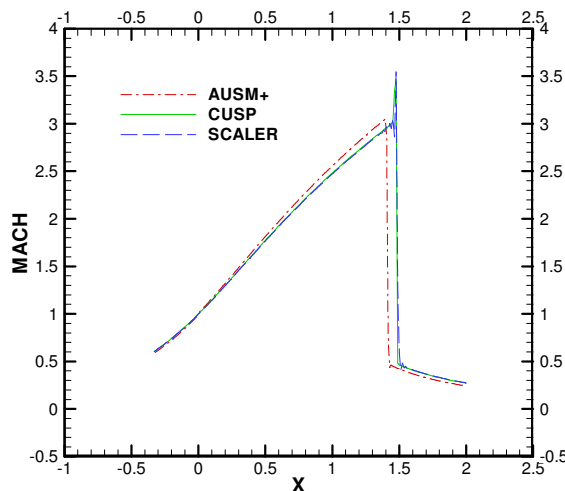
شکل 6- نمودار عدد ماخ در داخل شیپوره (حد بالا)

نتیجه گیری و جمع بندی

نتایج نشان می دهد که طرح کاسپ ضمن ارائه دقیق تر نتایج، نسبت به طرح اسکالر از نوسانات به مقدار قابل توجه ای می کاهد، با این وجود این طرح در ماخ های بالاتر از حدود 2 دقت کافی ندارد. طرح AUSM+ در محدوده ماخ های مختلف دقت بیشتری در تسخیر شوک در مقایسه با طرح اتلاف مصنوعی کاسپ و اسکالر دارد و همواره در هر شرایطی شامل ماخ های بالا و محدوده ماخ های پایین عملکردی خوبی از خود نشان می دهد. شکل کاملتر این موضوع برای خانواده طرح های AUSM در مقاله کامل ارائه خواهد شد.

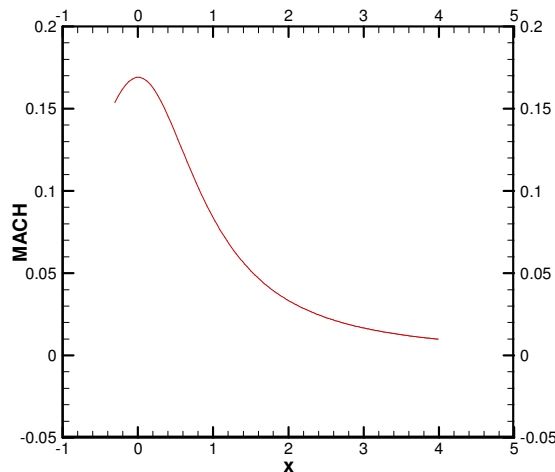
مراجع

- [1] Jamson, A., Schmidt, W., 1985. "Some Recent Developments in Numerical Methods for Transonic Flows". Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 51, pp. 467-493
- [2] یوسفی راد، ادریس، مه پیکر، محمدرضا، تیمورتاش، علیرضا. 1393. "بکارگیری روش کاسپ و بهینه سازی آن با استفاده از روش معکوس جهت بهبود روش حجم محدود جیمسون دو بعدی". مجله علمی و پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس، شماره 8، صفحه 174-182
- [3] Liou, M. S., Steffen, C. J., 1993. "A New Flux Splitting Scheme". Journal of Computational Physics, Vol. 107, pp.23-29
- [4] Jamson, A., Schmidt, W., Turkel, E., 1981. "Numerical Solution of the Euler Equation by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Scheme", AIAA paper 81-1259
- [5] Liou, M. S., 2001. "Ten years in the making-AUSM-family". AIAA paper, 2001-2521
- [6] Liou, M. S., 2006. "A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds". Journal of Computational Physics, 214, pp. 137-170



شکل 4- نمودار عدد ماخ در داخل شیپوره (n=200)

لازم به ذکر است روش AUSM+ همان طور که در شکل های 5 و 6 مشاهده می شود، تا محدوده ماخ های بالا حدود 7 و ماخ های پایین حدود 0.01 جواب های قابل قبولی ارائه می دهد. این در حالی است که روش کاسپ و اسکالر در این حدود ماخ ها جواب قابل قبولی از خود نشان نمی دهند. ضمن این که این روش دارای زمان همگرایی و مقدار باقیمانده کمتر می باشد.



شکل 5- نمودار عدد ماخ در داخل شیپوره (حد پایین)

