

# تخمین جرم و سختی سازه با به روزرسانی مستقیم الگوی سازه

حسن سرمدی\* (کارشناس ارشد)

عباس کرم‌الدین (استادیار)

علیرضا انتظامی (دانشجوی دکتری)

گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)  
دربی ۲ - ۳، شماره ۱/۲، ص. ۱۳۹-۱۴۵، (یادداشت شفاهی)

هدف از این پژوهش، تخمین پارامترهای دینامیکی سازه شامل ماتریس‌های جرم و سختی، با استفاده از روش به‌روزرسانی الگوی سازه است. در این راستا، با در نظر گرفتن اطلاعات اولیه الگوی نظری و استفاده از داده‌های مودال همچون فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، ماتریس‌های جرم و سختی شناسایی می‌شوند. در بخش رابطه‌سازی، توابع هدف به صورت اختلاف بین الگوهای نظری و تجربی تعریف، و با بهره‌گیری از بسط مسئله مقدار ویژه و تعامد مودها، تخمین پارامترهای دینامیکی سازه رابطه‌سازی می‌شود. پارامترهای آزمایشگاهی مودال طی آزمایش تجربی مودال روی یک قاب سه طبقه تعیین شده است. درستی رابطه‌های ارائه شده ابتدا با حل مسئله عددی بررسی، و سپس با داده‌های آزمایشگاهی، جرم و سختی قاب سه طبقه استخراج می‌شود. در نهایت، با مقایسه فرکانس‌های طبیعی الگوی تخمین زده شده با الگوی آزمایشگاهی، می‌توان همگرایی مناسبی بین آن‌ها مشاهده کرد و از درستی تخمین پارامترهای دینامیکی اطمینان حاصل کرد.

واژگان کلیدی: تخمین ماتریس‌های جرم و سختی، داده‌های حقیقی مودال، روش به‌روزرسانی مستقیم الگوی سازه.

## ۱. مقدمه

«شناسایی سیستم» در چند دهه گذشته با پیشرفت آزمایش دینامیکی مودال، یکی از روش‌های مفید برای ارزیابی سازه‌ها تحت اثر بارهای ارتعاشی قرار گرفته است. به طوری که بدون داشتن اطلاعات و ویژگی‌های موجود در سیستم مورد نظر، نمی‌توان به درستی رفتار دینامیکی آن را ارزیابی کرد. افزون بر مسئله تحلیل و ارزیابی رفتار دینامیکی سازه‌ها، امروزه سازه‌های عظیمی همچون سدها، برج‌ها و پل‌ها، در سطح جهان ساخته شده و در حال بهره‌برداری هستند. در این گونه سازه‌ها، پی بردن به سلامت و شناسایی آسیب‌های احتمالی برای ارزیابی عملکرد سازه در زمان بهره‌برداری، از اهمیت بسیاری برخوردار است. بنابراین رسیدن به این اهداف جز با شناسایی و تخمین پارامترهای دینامیکی سازه‌ها قابل دسترسی نخواهد بود. این پارامترهای دینامیکی به طور کلی ویژگی‌های فیزیکی - دینامیکی سازه شامل ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی نامیده می‌شوند.

در چند دهه اخیر، روش‌های متعددی برای تخمین و شناسایی پارامترهای دینامیکی توسط داده‌های مودال رابطه‌سازی شده است. در همین راستا، با استفاده از روش به‌روزرسانی الگوی سازه و بهره‌گیری از تابع‌های پاسخ فرکانسی (FRF)

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۳/۲، اصلاحیه ۱۳۹۳/۳/۱۸، پذیرش ۱۳۹۳/۳/۲۰.

hassan.sarmadi@st u-mail.um.ac.ir  
akaramodin@yahoo.com  
ent ezami@st u-mail.um.ac.ir

ماتریس‌های جرم و سختی شناسایی شد.<sup>[۱]</sup> همچنین ماتریس جرم سازه به وسیله بردارهای ویژه اندازه‌گیری شده و کمینه‌سازی تابع وزنی به صورت اختلاف الگوی نظری و تجربی پیش‌بینی شد.<sup>[۲]</sup> در تحقیقات بعدی، ضمن حذف شرایط اتصال سازه و با بهره‌گیری از جابه‌جایی‌های مودال اندازه‌گیری شده، در مورد شناسایی ماتریس جرم رابطه‌سازی شد.<sup>[۳]</sup> با ایجاد روش بهبود الگوی نظری، روش تخمین ماتریس جرم بهبود یافت.<sup>[۴]</sup> محققین همچنین ماتریس سختی را براساس روش Berman تصحیح و به‌روزرسانی کردند و در ادامه، با ارائه روش حساسیت تعامد الگوی سازه اصلاح شد.<sup>[۵]</sup> در روش آن‌ها به طور همزمان کاستی‌های خصوصیات جرم و سختی الگو شده بهبود یافت، به طوری که اندازه‌ی واقعی ماتریس‌ها حفظ شد. در مطالعات بعدی نیز با ارتقاء روش به‌روزرسانی مستقیم الگوی سازه شناسایی ماتریس‌های جرم و سختی سازه‌ها بررسی شد.<sup>[۶]</sup> بدین منظور با این فرض که با استفاده از پارامترهای مودال الگوی نظری، ماتریس جرم واقعی سازه به‌روز شده، ماتریس سختی تخمین زده شد. از دیگر روش‌ها در زمینه به‌روزرسانی الگوی سازه، می‌توان به پژوهش انجام شده در خصوص تخمین ماتریس‌های جرم و سختی توسط داده‌های اندازه‌گیری شده مودال<sup>[۷]</sup> اشاره کرد. در بررسی یادشده محققین با استفاده از تعریف تابع هدف و روش شبه معکوس‌سازی برای داده‌های ناکامل مودال، توانستند ماتریس جرم و سختی سازه را شناسایی کنند. همچنین از چند

الگوی نظری و الگوی تجربی هستند. با وجود توانایی شناسایی پارامترهای مودال، در آزمایش مودال به دلیل محدودیت‌هایی همچون مشکلات موجود در انجام آزمایش و عملی نبودن استخراج تمام اطلاعات مودال، داده‌های به دست آمده ناکامل‌اند. روش‌های گسترش و کاهش الگو از جمله روش‌هایی هستند که با کمک آن‌ها می‌توان داده‌های مودال -- به خصوص ماتریس مودهای ارتعاشی -- را به صورت  $N$  درجه آزادی بیان کرد.<sup>[۱۵]</sup> با در نظر گرفتن مسئله‌ی مقدار ویژه، با فرض میرایی نسبی برای سازه می‌توان از گسترش رابطه‌ی ۱ به مودهای اندازه‌گیری نشده دست یافت.

$$(K - \omega_i^2 M) \phi_i = 0 \quad (1)$$

بر اساس رابطه‌ی ۱ و با جداسازی ماتریس‌های جرم و سختی می‌توان داده‌های مودال را به صورت کامل استخراج کرد:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن زیرماتریس‌های ۱ و ۲ به ترتیب بیان‌گر مودهای اندازه‌گیری شده و اندازه‌گیری نشده هستند. با قرار دادن ماتریس‌های تفکیک‌شده‌ی جرم و سختی در رابطه‌ی ۲ می‌توان مودهای اندازه‌گیری نشده را تعیین کرد.

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_{i1} \\ \phi_{i2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3)$$

با گسترش رابطه‌ی ۳ دو رابطه‌ی ۴ و ۵ که بیان‌کننده‌ی مودهای اندازه‌گیری شده و اندازه‌گیری نشده هستند حاصل می‌شود. با حل یکی از این دو رابطه شکل مودهای ارتعاشی کامل خواهد شد.

$$(K_{11} - \omega_i^2 M_{11}) \phi_{i1} + (K_{12} - \omega_i^2 M_{12}) \phi_{i2} = 0 \quad (4)$$

$$(K_{21} - \omega_i^2 M_{21}) \phi_{i1} + (K_{22} - \omega_i^2 M_{22}) \phi_{i2} = 0 \quad (5)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۴ یا ۵ می‌توان به شکل مودهای اندازه‌گیری نشده دست یافت.

$$\phi_{i2} = (K_{22} - \omega_i^2 M_{22})^{-1} (K_{21} - \omega_i^2 M_{21}) \phi_{i1} \quad (6)$$

خاطر نشان می‌شود در حل مسئله‌های عددی به روش مسئله‌ی مقدار ویژه، داده‌های مودال مقادیری کامل‌اند و محدودیت ناکامل بودن مودها تنها در آزمایش مودال به وجود می‌آید. از سوی دیگر به دلیل ساده بودن و نیز مشابهت سازه‌ی مورد آزمایش به سیستم‌های گسسته‌ی دینامیکی و قابلیت اندازه‌گیری مودهای ارتعاشی، داده‌های مودال همانند روش‌های نظری داده‌هایی کامل‌اند. با توجه به توضیحات ارائه شده، مبنای رابطه‌سازی برای تخمین ماتریس‌های جرم و سختی سازه به صورت تعریف تابع هدف، اختلاف میان پارامترهای دینامیکی الگوی نظری و تجربی در نظر گرفته می‌شود. این تابع‌های هدف عبارت‌اند از: ماتریس اختلاف جرمی  $[\Delta M] = [M_x] - [M_a]$  و ماتریس اختلاف سختی  $[\Delta K] = [K_x] - [K_a]$ . همچنین با فرض در اختیار داشتن شکل مودهای ارتعاشی الگوی آزمایشگاهی و گسترش آن‌ها توسط رابطه‌ی ۶، می‌توان به ماتریس اختلاف مودهای الگوی نظری و تجربی به صورت رابطه‌ی  $[\Delta \phi] = [\phi_x] - [\phi_a]$  دست یافت. قابل درک است که تعیین ماتریس‌های اختلاف جرمی و سختی به دلیل عدم وجود ماتریس‌های جرم  $[M_x]$  و سختی  $[K_x]$  الگوی واقعی سازه، امکان‌پذیر نیست.<sup>[۱۵]</sup> بنابراین در این روش هدف اصلی

تابع هدف در روش به‌روزرسانی الگوی سازه استفاده کرده و توانستند روشی نوین برای تخمین ماتریس‌های جرم و سختی توسط داده‌های مودال پیشنهاد دهند.<sup>[۸]</sup> در پژوهشی دیگر<sup>[۱۰]</sup> با در نظر گرفتن داده‌های مختلط مودال و بهره‌گیری از روش فضای حالت، جرم و سختی در سیستم‌های گسسته‌ی دینامیکی برآورده شد. یکی از محدودیت‌های استفاده از داده‌های مودال ناکامل بودن آن‌هاست. پژوهش‌گران با پیشنهاد یک روش و با استفاده از تابع‌های پاسخ فرکانسی به شناسایی ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی پرداختند.<sup>[۱۱]</sup> همچنین با بهره‌گیری از داده‌های محدود مودال به شناسایی ماتریس‌های جرم و سختی پرداختند.<sup>[۱۲]</sup> آنان روش پیشنهادی خود را برای قاب‌های برشی به‌عنوان سیستم گسسته‌ی دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. از سوی دیگر با استفاده از داده‌های ناکامل مودال<sup>[۱۳]</sup> ماتریس‌های جرم و سختی توسط روش بهینه‌سازی برآورده شد. همچنین با استفاده از پاسخ‌های خطی حاصل از بارهای محیطی در حوزه‌ی زمان<sup>[۱۴]</sup> ماتریس سختی قاب‌های برشی شناسایی شد.

هدف از انجام این پژوهش، تخمین پارامترهای دینامیکی سازه شامل ماتریس‌های جرم و سختی با استفاده از روش به‌روزرسانی الگوی سازه است. برای دست‌یابی به این اهداف از پارامترهای مودال شامل فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی استفاده می‌شود. مبنای نظری پژوهش بر اساس تعریف توابع هدف به صورت اختلاف ماتریس‌های جرم و سختی است. سپس با گسترش شرط‌های تعامد مودی و بهره‌گیری از توابع هدف در فرایند به‌روزرسانی، پارامترهای دینامیکی سازه رابطه‌سازی می‌شود. در پژوهش حاضر، روابط ارائه شده توسط محققین<sup>[۶]</sup> بر اساس معیار روش مستقیم به‌روزرسانی الگوی سازه بهینه شده و ارتقاء می‌یابد. برخلاف پژوهش آن‌ها، تعیین ماتریس جرم واقعی سازه به‌عنوان پیش‌نیاز تخمین ماتریس سختی ضرورتی ندارد. در واقع در روش پیشنهادی، با داشتن اطلاعات اولیه از الگوی نظری و داده‌های اندازه‌گیری شده مودال، صرفاً می‌توان به‌طور جداگانه ماتریس‌های جرم و سختی الگوی واقعی سازه را محاسبه کرد. همچنین کاهش خطای تخمین ماتریس‌های جرم و سختی و نیز همگرایی رفتار دینامیکی الگوی تخمین زده شده با الگوی آزمایشگاهی از دیگر مزایای این پژوهش است. خاطرنشان می‌شود که روابط روش به‌روزرسانی الگوی سازه بسیار حساس و پیچیده‌اند. به عبارتی دیگر، با تغییر علامت و پارامترهای موجود در آن‌ها، نتایج به‌طور قابل توجهی با خطا روبه‌رو می‌شوند. بنابراین مشابهت اطلاعات و اجزای تشکیل‌دهنده‌ی رابطه‌ها در روش به‌روزرسانی الگوی سازه، به معنای یکسان بودن نتایج یا مشابهت رابطه‌سازی‌های نخواهد بود. برای ارزیابی روش‌های پیشنهادی، ابتدا یک قاب برشی چهارطبقه به صورت عددی واری می‌شود. سپس جرم و سختی یک قاب آزمایشگاهی سه طبقه با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی مودال تخمین زده می‌شوند.

## ۲. رابطه‌سازی ریاضی برای تخمین جرم و سختی

برای تخمین پارامترهای دینامیکی سازه -- ماتریس‌های جرم و سختی -- ابتدا اطلاعات اولیه‌ی الگوی نظری تعریف می‌شود. این پارامترها به‌طور معمول توسط مفاهیم بنیادی اجزای محدود و الگوسازی نظری انجام می‌گیرد. بر این اساس چنانچه  $[M_a]$  و  $[K_a]$  به ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی نظری سازه باشند می‌توان با حل مسئله‌ی مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی سازه  $\{\omega_a\}$  و شکل مودهای ارتعاشی  $[\phi_a]$  را به‌عنوان داده‌های مودال از اطلاعات اولیه سازه به دست آورد. همچنین با انجام آزمایش دینامیکی مودال، داده‌های اندازه‌گیری شده  $\{\omega_x\}$  و  $[\phi_x]$  در اختیارند. در عبارت‌های بیان‌شده زیرماتریس‌های  $a$  و  $x$  به ترتیب داده‌های مرتبط با

با در نظر گرفتن ماتریس ضرایب جرمی سازه  $[c_m]$  و تعیین ماتریس خطای جرمی  $[\Delta M]$  می‌توان ماتریس جرم سازه را به صورت ماتریس جرم الگویی تجربی براساس رابطه‌ی ۱۴ تخمین زد.

$$[M_x] = [M_a] + \left( [M_a] [\phi_a] [c_m] [\phi_a]^T [M_a] \right) \quad (14)$$

چنان که مشاهده می‌شود فقط با داشتن جرم اولیه‌ی سازه و شکل مودهای ارتعاشی می‌توان ماتریس جرم واقعی سازه را استخراج کرد. نداشتن تمام داده‌های مودال در تمام درجه‌های آزادی، تنها محدودیت در تخمین ماتریس جرم سازه  $N$  درجه آزادی است.

چنان که پیش‌تر اشاره شده می‌توان با روش‌های گسترش مودی به شکل کامل مودهای ارتعاشی دست یافت. از سوی دیگر چنانچه فقط از چند مود اولیه‌ی سازه استفاده شود، برای جلوگیری از خطا در عملیات ماتریسی، تمامی ماتریس‌ها را به صورت کامل تعریف کرده و تنها برای مودهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، سطر و ستون متناظر با آن‌ها را برابر با صفر قرار داده می‌شوند. با این روش علاوه بر استخراج کامل ماتریس جرم تنها می‌توان از چند مود ارتعاشی سازه استفاده کرد. همچنین در برخی از سازه‌ها فقط مود اول بر سازه حاکم است. در این صورت به جای استفاده از تمام درجه‌های آزادی می‌توان تنها از مود اول سازه بهره برد. بر این اساس، ماتریس ضرایب جرمی  $[c_m]$  به صورت مقادیر اسکالر تعیین می‌شود:

$$c_m = - \{ \Delta \phi \}^T [M_a] \{ \phi_a \} - \{ \phi_a \}^T [M_a] \{ \Delta \phi \} \quad (15)$$

در این رابطه شکل مودهای ارتعاشی به صورت بردارهای ستونی  $N \times 1$  تعریف می‌شود. با تعریف ضریب جرمی، می‌توان به ماتریس اختلاف جرم به صورت  $[\Delta M] = c_m [M_a]$  دست یافت. در نتیجه ماتریس جرم سازه را می‌توان فقط با لحاظ کردن مود اول ارتعاشی سازه ارائه کرد:

$$[M_x] = (1 + c_m) [M_a] \quad (16)$$

چنان که مشاهده می‌شود، رابطه‌ی ۱۶ مربوط به گسترش تخمین ماتریس جرم سازه است هنگامی که فقط مود اول سازه بر رفتار دینامیکی آن حاکم باشد. این فرایند بیشتر برای سازه‌های ساده، همانند قاب آزمایشگاهی مورد نظر، بسیار کاربردی است. همچنین با فرض در نظر گرفتن چند مود اول ارتعاشی و استفاده از رابطه‌ی ۱۶ می‌توان نتایج قابل اطمینانی از شناسایی ماتریس جرم به دست آورد.

## ۲.۲. تخمین ماتریس سختی سازه

برای تخمین ماتریس سختی نیز براساس اطلاعات اولیه‌ی الگویی نظری و داده‌های مودال آزمایشگاهی می‌توان از شرط تعامد مودی برای سختی استفاده کرد. هدف از این گام محاسبه‌ی ماتریس اختلاف سختی  $[\Delta K]$  است. پرا واضح است که با تعیین این ماتریس می‌توان به ماتریس سختی واقعی سازه دست یافت. با قرار دادن ماتریس شکل مودهای واقعی سازه  $[\phi_x] = [\phi_a] + [\Delta \phi]$  و سختی واقعی سازه به صورت  $[K_x] = [K_a] + [\Delta K]$  در رابطه‌ی ۱۷ و گسترش آن می‌توان ماتریس اختلاف سختی  $[\Delta K]$  را محاسبه کرد. در این بخش نیز با این فرض که تمام مودهای ارتعاشی مقیاس شده‌اند، برای هر مود رابطه‌ی ۱۷ همواره برقرار است.

$$[\phi_x]^T [K_x] [\phi_x] = \Lambda_x \quad (17)$$

$$([\phi_a] + [\Delta \phi])^T ([K_a] + [\Delta K]) ([\phi_a] + [\Delta \phi]) = \Lambda_x \quad (18)$$

تعیین ماتریس‌های اختلاف جرمی و سختی براساس اطلاعات اولیه‌ی الگویی نظری و داده‌های مودال حاصل از آن‌هاست. پس از تعیین این ماتریس‌ها، پارامترهای دینامیکی واقعی سازه که در واقع همان جرم و سختی الگویی آزمایشگاهی هستند، تخمین زده می‌شود. با تعریف اطلاعات اولیه از الگویی نظری و اندازه‌گیری پارامترهای تجربی مودال، در ادامه به محاسبه‌ی ماتریس جرم و سختی سازه در حالت کلی می‌پردازیم.

## ۱.۲. تخمین ماتریس جرم سازه

با داشتن اطلاعاتی همچون ماتریس‌های جرم و سختی الگویی نظری و داده‌های مودال الگویی تجربی، می‌توان با استفاده از تابع هدف تعریف شده به محاسبه‌ی ماتریس جرم سازه پرداخت. در گام نخست باید با استفاده از داده‌های موجود، ماتریس نامعین  $[\Delta M]$  را محاسبه کرد. برای رسیدن به این ماتریس، شکل مودهای واقعی سازه را به صورت  $[\phi_x] = [\phi_a] + [\Delta \phi]$  و جرم واقعی سازه را به صورت  $[M_x] = [M_a] + [\Delta M]$  در نظر گرفته و در رابطه‌ی ۷ جایگزین می‌شود:

$$[\phi_x]^T [M_x] [\phi_x] = I \quad (7)$$

$$([\phi_a] + [\Delta \phi])^T ([M_a] + [\Delta M]) ([\phi_a] + [\Delta \phi]) = I \quad (8)$$

با آ‌ور می‌شود در تمامی مراحل رابطه‌سازی شکل مودهای ارتعاشی مقیاس شده‌اند. به عبارت دیگر رابطه‌ی ۷ به‌ازای هر مود برقرار است. با گسترش رابطه‌ی ۸ می‌توان آن را چنین ارائه کرد:

$$\begin{aligned} & [\phi_a]^T [M_a] [\phi_a] + [\phi_a]^T [\Delta M] [\phi_a] + [\Delta \phi]^T [M_a] [\phi_a] \\ & + [\Delta \phi]^T [\Delta M] [\phi_a] + [\phi_a]^T [M_a] [\Delta \phi] + [\phi_a]^T [\Delta M] [\Delta \phi] \\ & + [\Delta \phi]^T [M_a] [\Delta \phi] + [\Delta \phi]^T [\Delta M] [\Delta \phi] = I \end{aligned} \quad (9)$$

با حذف برخی از عبارت‌های مورد نظر و یا صفر شدن آنها، رابطه‌ی نهایی برای تخمین ماتریس اختلاف جرمی عبارت خواهد بود از:

$$[\phi_a]^T [\Delta M] [\phi_a] = - [\Delta \phi]^T [M_a] [\phi_a] - [\phi_a]^T [M_a] [\Delta \phi] \quad (10)$$

چنان که مشاهده می‌شود، قسمت راست رابطه‌ی ۱۰ یک ماتریس  $N \times N$  است که به جرم اولیه‌ی الگویی نظری و شکل مودهای ارتعاشی حاصل از الگویی نظری و الگویی آزمایشگاهی بستگی دارد. بنابراین برای سهولت رابطه‌سازی می‌توان این عبارت‌ها را به صورت ماتریس ضرایب جرم تعریف کرد:

$$[c_m] = - [\Delta \phi]^T [M_a] [\phi_a] - [\phi_a]^T [M_a] [\Delta \phi] \quad (11)$$

رابطه‌ی ۱۰ با پیش و پس ضرب  $[\phi_a]$  و  $[\phi_a]^T$  گسترش داده می‌شود:

$$[\phi_a] [\phi_a]^T [\Delta M] [\phi_a] [\phi_a]^T = [\phi_a] [c_m] [\phi_a]^T \quad (12)$$

با توجه به مقیاس بودن شکل مودهای ارتعاشی و استفاده از شرط تعامد مودی رابطه‌ی ۷ برای الگویی نظری به صورت  $[\phi_a]^T [M_a] [\phi_a] = I$ ، می‌توان حاصل ضرب شکل مودهای الگویی نظری را برابر با معکوس ماتریس جرم سازه دانست. بر این اساس رابطه‌ی  $[\phi_a] [\phi_a]^T = [M_a]^{-1}$  جایگزین شده و ماتریس نامعین اختلاف جرمی  $[\Delta M]$  تعیین می‌شود.

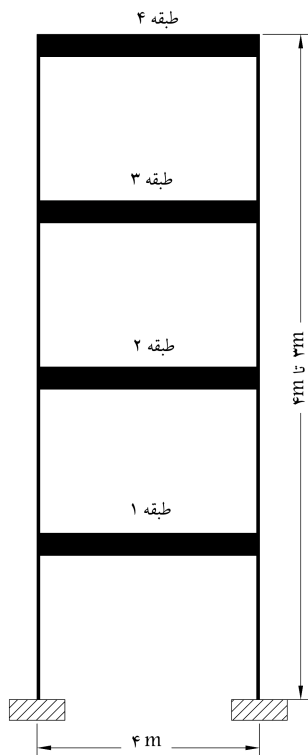
$$[\Delta M] = [M_a] [\phi_a] [c_m] [\phi_a]^T [M_a] \quad (13)$$

جدول ۱. جرم واقعی طبقات برای قاب برشی چهارطبقه (Ton).

[M]	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳	طبقه ۴
جرم واقعی	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۱۵۰

جدول ۲. سختی واقعی طبقات برای قاب برشی چهارطبقه (KN/m).

[K]	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳	طبقه ۴
سختی واقعی	۳۵	۳۰	۲۵	۲۰



شکل ۱. قاب برشی چهارطبقه.

فرکانس‌های طبیعی و مدهای به دست آمده از آن‌ها به‌عنوان داده‌های آزمایشگاهی با شبیه‌سازی آزمایش مودال در نظر گرفته می‌شوند. در جدول‌های ۱ و ۲ اطلاعات اولیه قاب برشی چهارطبقه شامل جرم و سختی واقعی طبقات ارائه شده است. قاب مورد نظر به‌صورت یک سیستم گسسته‌ی دینامیکی (سیستم جرم متمرکز) الگوسازی می‌شود. با داشتن پارامترهای دینامیکی هر طبقه، ماتریس‌های جرم و سختی توسط الگوریتم سیستم‌های گسسته تشکیل می‌شوند. شکل ۱ نمایی از قاب برشی مورد نظر را نشان می‌دهد.

با شبیه‌سازی آزمایش مودال برای الگوی مورد نظر و حل مسئله‌ی مقدار ویژه می‌توان ماتریس قطری فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای مقیاس‌شده‌ی سازه را شناسایی کرد. جدول‌های ۳ و ۴ به ترتیب بیان‌گر شکل مدهای ارتعاشی مقیاس شده و مقادیر فرکانس طبیعی‌اند.

اطلاعات اولیه‌ی الگوی نظری سازه، با کمی تفاوت نسبت به پارامترهای دینامیکی واقعی سازه تعریف می‌شوند. چنانچه جرم طبقات اول تا سوم برابر ۱۵۰ تن و طبقه‌ی چهارم برابر ۱۱۲/۵ تن در نظر گرفته شود، و نیز سختی طبقات در الگوی نظری نصف داده‌های واقعی فرض شده باشند، آنگاه ماتریس قطری فرکانس طبیعی سازه و شکل مدهای ارتعاشی در الگوی نظری محاسبه خواهند شد. با توجه به رابطه‌های

در رابطه‌ی ۱۸ ماتریس قطری مقدارهای ویژه به‌صورت  $\Lambda_x = \text{diag}(\omega_x^2)_i$  دربرگیرنده‌ی مجذور فرکانس‌های طبیعی الگوی تجربی سازه است. با گسترش رابطه‌ی ۱۸ و حذف عبارت‌ها و صفرشدن برخی از آن‌ها رابطه‌ی کلی ۱۹ تعریف می‌شود.

$$[\phi_a]^T [\Delta K] [\phi_a] = \Lambda_x - \Lambda_a - [\Delta \phi]^T [K_a] [\phi_a] - [\phi_a]^T [K_a] [\Delta \phi] \quad (19)$$

همچون روش ارائه شده برای تخمین ماتریس جرم، و با فرض مقیاسی بودن شکل مدهای ارتعاشی، با پیش و پس ضرب  $[\phi_a]^T$  و  $[\phi_a]$  در رابطه‌ی ۱۹ می‌توان ماتریس اختلاف سختی  $[\Delta K]$  را محاسبه کرد:

$$[\Delta K] = [M_a] [\phi_a] [c_k] [\phi_a]^T [M_a] \quad (20)$$

که در آن  $[c_k]$  ماتریس ضرایب سختی است. این ماتریس شامل داده‌های مودال از الگوی نظری و الگوی تجربی به همراه ماتریس سختی الگوی نظری سازه است.

$$[c_k] = \Lambda_x - \Lambda_a - [\Delta \phi]^T [K_a] [\phi_a] - [\phi_a]^T [K_a] [\Delta \phi] \quad (21)$$

سرانجام با تعیین ماتریس اختلاف سختی و داشتن اطلاعات اولیه‌ی الگوی نظری، می‌توان ماتریس سختی واقعی سازه را شناسایی کرد.

$$[K_x] = [K_a] + [M_a] [\phi_a] [c_k] [\phi_a]^T [M_a] \quad (22)$$

چنان که مشاهده می‌شود برای تخمین ماتریس سختی واقعی سازه با استفاده از روش به‌روزرسانی الگوی سازه، دیگر نیازی به استفاده از ماتریس جرم واقعی سازه نیست و صرفاً با اطلاعات اولیه‌ی الگوی نظری و داده‌های مودال متناظر با آن، به همراه داده‌های اندازه‌گیری شده مودال از الگوی تجربی، می‌توان ماتریس سختی واقعی سازه را با دقت مطلوب تعیین کرد. در صورت حاکم بودن چند مود اول بر رفتار دینامیکی سازه همانند روش تخمین ماتریس جرم، شکل کلی ماتریس داده‌های مودال تغییر نمی‌کند. در این گام درایه‌ی سطر و ستون مربوط به مدهای اندازه‌گیری نشده برابر صفر قرار داده شده و عملیات ماتریسی به‌صورت کامل انجام می‌گیرد. چنانچه فقط مود اول بر سازه حاکم باشد، ماتریس ضرایب  $[c_k]$  به‌صورت اسکالر تعیین می‌شود. در نتیجه می‌توان ماتریس سختی سازه را تنها با در نظر گرفتن مود و فرکانس مود اول سازه تخمین زد.

$$c_k = (\omega_x)^2 - (\omega_a)^2 - \{\Delta \phi\}^T [K_a] \{\phi_a\} - \{\phi_a\}^T [K_a] \{\Delta \phi\} \quad (23)$$

در رابطه‌ی ۲۳ نیز شکل مدهای ارتعاشی به‌صورت بردار  $N \times 1$  تعریف می‌شود. با تعیین ضریب  $c_k$  ماتریس سختی سازه با استفاده از مود اول سازه رابطه‌سازی می‌شود:

$$[K_x] = [K_a] + c_k [M_a] \quad (24)$$

### ۳. حل مسئله‌ی عددی و بررسی آزمایشگاهی

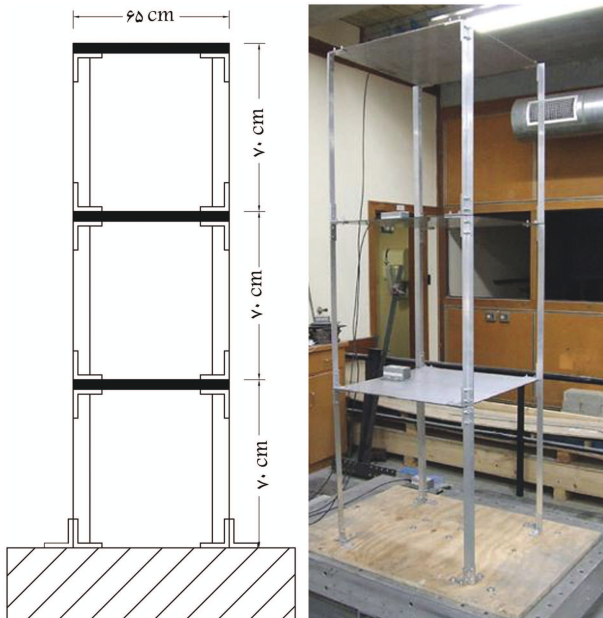
#### ۳.۱. تخمین جرم و سختی قاب چهارطبقه به روش عددی

برای ارزیابی صحت رابطه‌سازی انجام شده، یک قاب برشی چهارطبقه بررسی می‌شود. ابتدا با فرض موجود بودن ماتریس‌های جرم و سختی واقعی این سازه،

برای شناسایی ماتریس های جرم و سختی واقعی سازه با استفاده از روش به روزرسانی الگوی سازه است.

### ۲.۳. تخمین جرم و سختی قاب سه طبقه‌ی آزمایشگاهی

در این بخش ماتریس های جرم و سختی یک قاب سه طبقه با استفاده از داده های مودال به دست آمده از آزمایش تجربی مودال تخمین زده می شود. قاب مورد بررسی یک قاب آزمایشگاهی به ارتفاع ۲٫۱ متر و با طول و عرض ۶۵ سانتی متر است. ستون های این قاب از نبشی های آلومینیومی با ابعاد ۳۰ میلی متر و ضخامت ۴٫۵ میلی متر ساخته شده است. سقف هر طبقه به صورت یک صفحه ی فولادی به ضخامت ۴ میلی متر و ابعاد ۶۵ × ۶۵ سانتی متر توسط نبشی و اتصال پیچی به ستون ها متصل شده است. در شکل ۲ الگویی از سازه ی مورد آزمایش نشان داده شده است. با تحریک سازه ی مورد نظر و پردازش سیگنال<sup>[۱۶]</sup> داده های آزمایشگاهی مودال شامل فرکانس های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی مطابق جداول ۸ و ۹ ارائه می شود. خاطرنشان می شود شکل مودهای ارتعاشی حاصل از آزمایش مودال داده هایی مقیاس شده اند.<sup>[۱۷]</sup> همچنین در فرایند استخراج پارامترهای مودال، داده های اندازه گیری شده مختلط تعیین شدند. به دلیل وجود میرایی کم سازه، بخش موهومی



شکل ۲. الگوی قاب سه طبقه‌ی آزمایشگاهی.

جدول ۸. ماتریس شکل مودهای آزمایشگاهی قاب سه طبقه.

$[\phi_{\omega}]$	مود ۱	مود ۲	مود ۳
طبقه ۱	۰٫۲۸۲	-۰٫۶۳۳	۰٫۵۰۸
طبقه ۲	۰٫۵۰۸	۰٫۲۸۲	-۰٫۶۳۳
طبقه ۳	۰٫۶۳۳	-۰٫۵۰۸	۰٫۲۸۲

جدول ۹. مقادیر آزمایشگاهی فرکانس طبیعی قاب سه طبقه (rad/s).

$[\omega_{\omega}]$	مود ۱	مود ۲	مود ۳
فرکانس طبیعی	۲٫۶۸۵	۷٫۵۲۵	۱۰٫۸۷۴

جدول ۳. مقادیر واقعی شکل مودهای ارتعاشی قاب چهار طبقه.

$[\phi_{\omega}]$	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴
طبقه ۱	۰٫۰۱۴	-۰٫۰۳۵	-۰٫۰۳۹	۰٫۰۴۴
طبقه ۲	۰٫۰۳۰	-۰٫۰۴۲	-۰٫۰۰۳	-۰٫۰۴۷
طبقه ۳	۰٫۰۴۳	-۰٫۰۰۳	۰٫۰۴۸	۰٫۰۲۶
طبقه ۴	۰٫۰۵۱	۰٫۰۵۰	-۰٫۰۳۶	-۰٫۰۱۰

جدول ۴. مقادیر واقعی فرکانس طبیعی قاب چهار طبقه (rad/s).

$[\omega_{\omega}]$	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴
فرکانس طبیعی	۴٫۵۲۰	۱۱٫۹۲۲	۱۷٫۶۱۵	۱۴۲٫۰۳۲

جدول ۵. تخمین جرم طبقات برای قاب برشی چهار طبقه (Ton).

$[M_{\omega}]$	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳	طبقه ۴
جرم طبقات	۱۹۰٫۲۵۲	۱۹۰٫۱۹۷	۱۹۰٫۳۷۹	۱۴۲٫۶۱۴

جدول ۶. ماتریس سختی تخمین زده شده برای قاب چهار طبقه (KN/m).

$[K_{\omega}]$				
۰	۰	-۲۶٫۵۳۵	۵۷٫۴۸۲	۰
۰	-۲۲٫۱۲۷	۴۸٫۶۴۱	-۲۶٫۵۳۵	۰
-۱۷٫۶۸۴	۳۹٫۸۰۹	-۲۲٫۱۲۷	۰	۰
۱۷٫۶۷۴	-۱۷٫۶۸۴	۰	۰	۰

جدول ۷. تخمین سختی طبقات برای قاب برشی چهار طبقه (KN/m).

$[K_{\omega}]$	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳	طبقه ۴
سختی طبقات	۳۰٫۹۴۷	۲۶٫۵۳۵	۲۲٫۱۲۷	۱۷٫۶۷۴

۱۴ و ۲۲، و با در نظر گرفتن اطلاعات کامل مودال، ماتریس جرم مطابق جدول ۵ و ماتریس سختی مطابق جدول ۶ تخمین زده می شود.

با جداسازی ماتریس سختی تخمین زده شده (جدول ۶) می توان سختی طبقات را مطابق جدول ۷ ارائه کرد.

جرم تخمینی برای طبقات را می توان به طور تقریبی برابر با جرم واقعی طبقات در نظر گرفت. در واقع بین جرم به دست آمده از روش های محاسباتی و جرم واقعی سازه حدود ۴٫۸۱ درصد خطا مشاهده می شود. این مقدار خطا نسبت به خطای به دست آمده از روش Yang و Chen بسیار ناچیز است. در نتیجه می توان از تخمین درست ماتریس جرم اطمینان حاصل کرد.

مقایسه ی مقادیر سختی به دست آمده از رابطه های ارائه شده با مقادیر واقعی آن ها نشانگر اختلافی در حدود ۱۱ درصد است. در نتیجه روش پیشنهادی تخمین ماتریس سختی نسبت به روش Yang و Chen با خطای کمتری مواجه است. ارزیابی رفتار دینامیکی سازه با مقایسه ی اختلاف فرکانس های طبیعی الگوی تخمینی و الگوی آزمایشگاهی، خطای تقریبی ۳٫۵ درصد را نشان می دهد. در واقع این همگرایی مطلوب فرکانس های طبیعی، به تنهایی بیانگر درستی رابطه سازی پیشنهادی

داده‌های مختلط نسبت به بخش حقیقی، مقادیری بسیار ناچیز است و برین اساس، با استفاده از روش جذر مجذور مربعات بخش‌های حقیقی و موهومی، پارامترهای مودال به صورت داده‌هایی حقیقی استخراج شدند.

برای تعریف اطلاعات اولیه‌ی الگوی نظری قاب سه‌طبقه از شرایط هندسی، اتصالاتی، اعضا و مصالح به کار گرفته شده در الگوی تجربی استفاده می‌شود. برای سقف این قاب آزمایشگاهی از صفحه‌ی فولادی استفاده شده است. با توجه به ابعاد موجود این صفحه و جرم مخصوص فولاد می‌توان برای هر طبقه، جرمی در حدود ۱/۳۵۲ کیلوگرم در نظر گرفت. در تخمین اولیه از جرم نبشی‌های اتصال به صفحه‌ی فولادی صرف‌نظر می‌شود. همچنین به دلیل استفاده از این نبشی‌ها و ایجاد اتصال پیچی برای متصل‌کردن ستون به صفحه‌ی فولادی می‌توان در فرض اولیه، سختی نظری سازه را مطابق جدول ۱۰ فرض کرد.

با تعریف اطلاعات اولیه‌ی قاب آزمایشگاهی، می‌توان ضمن حل مسئله‌ی مقدار ویژه پارامترهای مودال نظری را شناسایی کرد. یادآور می‌شود به دلیل فرض اولیه در الگوی نظری قاب آزمایشگاهی، پارامترهای مودال و نیز جرم و سختی واقعی سازه با مقادیر واقعی اختلاف خواهند داشت. در واقع با قراردادن اطلاعات اولیه‌ی الگوی سازه و استفاده از داده‌های آزمایشگاهی مودال در فرایند به‌روزرسانی الگوی سازه می‌توان به جرم و سختی واقعی سازه‌ها دست یافت. سرانجام با بررسی رفتار دینامیکی سازه از طریق مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی الگوی تخمین زده شده با داده‌های آزمایشگاهی، می‌توان از درستی پارامترهای دینامیکی سازه اطمینان حاصل کرد. در این بخش ابتدا ماتریس‌های جرم و سختی واقعی قاب سه‌طبقه برای داده‌های کامل مودال، و سپس فقط برای مود اول با توجه به رابطه‌های ارائه شده، شناسایی می‌شوند. براساس داده‌های به دست آمده از الگوهای نظری و تجربی، ماتریس‌های جرم و سختی واقعی سازه با استفاده از رابطه‌های ۱۴ و ۲۲ تخمین زده می‌شوند (جدول ۱۱ و ۱۲). ماتریس سختی جدول ۱۲ جداسازی شده و سختی هر طبقه مطابق جدول ۱۳ ارائه می‌شود.

جدول ۱۰. سختی نظری طبقات قاب سه‌طبقه آزمایشگاهی (N/cm).

$[K_{\alpha}]$	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳
سختی طبقات	۷۴/۶۲۶	۷۴/۶۲۶	۷۴/۶۲۶

جدول ۱۱. جرم تخمین زده شده قاب سه‌طبقه آزمایشگاهی (Kg).

$[M_{\alpha}]$	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳
جرم طبقات	۱/۳۵۲	۱/۳۵۲	۱/۳۵۲

جدول ۱۲. ماتریس سختی قاب سه‌طبقه آزمایشگاهی (N/cm).

$[K_{\alpha}]$	۱	۲	۳
۰	-۴۹/۲۵۷	۹۸/۵۲۲	۰
-۴۹/۲۵۷	۹۸/۵۲۲	-۴۹/۲۶۸	۰
۰	-۴۹/۲۶۸	۴۹/۲۶۶	۰

جدول ۱۳. سختی طبقات قاب سه‌طبقه آزمایشگاهی (N/cm).

$[K_{\alpha}]$	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳
سختی طبقات	۴۹/۲۵۷	۴۹/۲۶۸	۴۹/۲۶۶

جدول ۱۴. مقادیر فرکانس طبیعی الگوی تخمینی (rad/s).

$[\omega_{\alpha}]$	مود ۱	مود ۲	مود ۳
فرکانس طبیعی	۲/۶۴۵	۷/۲۳۱	۱۰/۴۰۴

جدول ۱۵. تخمین جرم طبقات براساس مود اول (Kg).

$[M_{\alpha}]_1$	طبقه ۱	طبقه ۲	طبقه ۳
جرم طبقات	۱/۳۴۸	۱/۳۴۸	۱/۳۴۸

برای پی بردن به درستی پارامترهای تخمین زده شده، به سنجش فرکانس‌های طبیعی بین الگوی آزمایشگاهی و الگوی تخمین زده شده می‌پردازیم. جدول ۱۴ بیانگر فرکانس‌های طبیعی حاصل از ماتریس‌های جرم و سختی الگوی تخمین زده شده است.

مقایسه‌ی جدول‌های ۹ و ۱۴ حاکی از اختلاف بسیار ناچیز فرکانس‌های طبیعی الگوی آزمایشگاهی و الگوی شناسایی شده است که نشانگر همگرایی مطلوب بین این الگوهاست. در نتیجه ماتریس‌های جرم و سختی استخراج شده توسط رابطه‌های ۱۴ و ۲۲ به درستی بیانگر پارامترهای دینامیکی سازه‌اند.

در برخی از سازه‌ها تنها چند مود اول ارتعاشی بر عملکرد دینامیکی سازه‌ها اثرگذار است. در نتیجه به جای استفاده از شکل کامل مودها می‌توان صرفاً با بهره‌گیری از چند مود اول سازه، پارامترهای دینامیکی را شناسایی کرد. براین اساس در الگوی آزمایشگاهی سه‌طبقه، با در نظر گرفتن حاکم بودن مود اول سازه، جرم طبقات با استفاده از رابطه‌ی ۱۶ تعیین می‌شود.

جدول‌های ۱۱ و ۱۵ به ترتیب بیانگر تخمین ماتریس جرم سازه با استفاده از اطلاعات کامل مودال و تنها مود اول سازه‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، می‌توان ماتریس جرم سازه را علاوه بر داشتن اطلاعات کامل پارامترهای مودال، تنها با استفاده از مود اول سازه نیز تعیین کرد. در واقع مقادیر ماتریس جرم استخراج شده توسط رابطه‌های ۱۴ و ۱۶ یکسان‌اند. به عبارت دیگر، در صورت ناکامل بودن داده‌های مودال مشکلی برای تخمین ماتریس جرم وجود ندارد و می‌توان براساس مود اول سازه‌ی ماتریس به محاسبه‌ی جرم سازه پرداخت. با این وجود، فرایند شناسایی ماتریس سختی براساس استفاده از تنها مود اول ارتعاشی با خطا مواجه می‌شود. در واقع دلیل اصلی این واگرایی لحاظ نکردن تمام فرکانس‌های طبیعی و وابستگی تخمین ماتریس سختی به این داده‌هاست. در نتیجه برای استخراج ماتریس سختی سازه باید به‌طور کلی از چند مود اصلی، به خصوص اطلاعات کامل مودال بهره جست.

#### ۴. نتیجه‌گیری

هدف از انجام این پژوهش، شناسایی و تخمین پارامترهای دینامیکی سازه شامل ماتریس جرم و سختی سازه بود. برای این منظور از روش به‌روزرسانی الگوی سازه استفاده شد. در این روش با تعریف توابع هدف به صورت ماتریس‌های اختلاف جرم و سختی در الگوهای نظری و آزمایشگاهی و گسترش شرط‌های تعامد مودها، می‌توان ماتریس‌های جرم و سختی واقعی سازه را تخمین زد. برای رسیدن به این اهداف، داشتن اطلاعات اولیه‌ی الگوی نظری شامل ماتریس‌های جرم و سختی به همراه پارامترهای مودال -- نظیر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی -- از بخش‌های اصلی رابطه‌سازی هستند. در فرایند شناسایی جرم و سختی، با الگوسازی نظری یک قاب برشی چهارطبقه به روش عددی، رابطه‌سازی پیشنهادی برای تخمین

آزمایشگاهی، فرکانس‌های طبیعی الگوی تخمینی با الگوی آزمایشگاهی ارزیابی شد. در حالت نخست، همگرایی مطلوب و دقیق فرکانس‌های طبیعی الگوی تخمینی با الگوی آزمایشگاهی نشان‌گر درستی تخمین ماتریس‌های جرم و سختی براساس اطلاعات کامل مودال بود. همچنین با داشتن ماتریس جرم در حالت داده‌های کامل مودال و بررسی رفتار دینامیکی سازه با داده‌های آزمایشگاهی درمی‌یابیم که فقط با استفاده از مود اول ارتعاشی می‌توان ماتریس جرم سازه را با دقت خوبی تعیین کرد. خاطرنشان می‌شود در تمامی مراحل فرایند شناسایی پارامترهای دینامیکی سازه، باید از اطلاعات خام و مقیاس‌شده‌ی مودال استفاده کرد. به‌طور کلی اطلاعات به دست آمده از آزمایش مودال بدون در نظر گرفتن خطاها و نیز روش‌های شبیه‌سازی آزمایش مودال، مقادیری مقیاس شده و خام‌اند.

پارامترهای دینامیکی اثبات شد. همگرایی پارامترهای تخمین زده شده با داده‌های واقعی متناظر با آن‌ها بیان‌گر درستی رابطه‌سازی تعیین ماتریس جرم و سختی بود. همچنین اختلاف رفتار دینامیکی سازه براساس معیار تفاوت فرکانس‌های طبیعی در الگوی تخمینی با الگوی آزمایشگاهی بسیار ناچیز بوده و در نتیجه پارامترهای دینامیکی با دقت مطلوبی شناسایی شدند.

با انجام آزمایش تجربی مودال روی یک قاب سه‌طبقه‌ی آزمایشگاهی، داده‌های مودال شناسایی شدند. با استفاده از اطلاعات موجود، جرم و سختی الگوی آزمایشگاهی در دو حالت تعیین شد. در گام نخست از اطلاعات کامل مودال استفاده شد، و سپس با در نظر گرفتن حاکمیت مود اول بر رفتار دینامیکی سازه، جرم و سختی تخمین زده شدند. برای پی‌بردن به درستی شناسایی جرم و سختی قاب

## منابع (References)

1. Visser, W.J. "Updating structural dynamics models using frequency response data", Degree of Doctor of Philosophy, Imperial College of Science, University of London (1993).
2. Baruch, M. "Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests", *AIAA Journal*, **16**, pp. 1208-10 (1978).
3. Berman, A. "Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes", *AIAA Journal*, **17**, pp. 1147-8 (1979).
4. Berman, A. and Nagy, E.J. "Improvement of a large analytical model using test data", *AIAA Journal*, **21**(8), pp. 1168-73 (1983).
5. Guo, H. "An orthogonality sensitivity method for analytical dynamic model correction using modal test data", *Journal of Sound and Vibration*, **187**, pp. 771-80 (1995).
6. Yang, Y.B and Chen, Y.J. "A new direct method for updating structural models based on measured modal data", *Engineering Structures*, **31**(1), pp. 32-42 (2009).
7. Lee, E.T. and Eun, H.C. "Update of corrected stiffness and mass matrices based on measured dynamic modal data", *Applied Mathematical Modelling*, **33**, pp. 2274-2281 (2009).
8. Lee, E.-T. Rahmatalla, S. and Eun, H.-C. "Estimation of parameter matrices based on measured data", *Applied Mathematical Modelling*, **35**, pp. 4816-4823 (2011).
9. Luş, H., De Angelis, M., Betti, R. and Longman, R. "Constructing second-order models of mechanical systems from identified state space realizations. Part I: Theoretical discussions", *Journal of Engineering Mechanics*, **129**, pp. 477-488 (2003).
10. Luş, H., De Angelis, M., Betti, R. and Longman, R. "Constructing second-order models of mechanical systems from identified state space realizations. Part II: Numerical investigations", *Journal of Engineering Mechanics*, **129**, pp. 489-501 (2003).
11. Lin R. and Zhu, J. "Model updating of damped structures using FRF data", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **20**, pp. 2200-2218 (2006).
12. Chakraverty, S. "Identification of structural parameters of multistorey shear buildings from modal data", *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, **34**(6), pp. 543-554 (2004).
13. Yuen, K.-V. "Updating large models for mechanical systems using incomplete modal measurement", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **28**, pp. 297-308 (2012).
14. Omrani, R., Hudson, R.E. and Taciroglu, E. "Story-by-story estimation of the stiffness parameters of laterally-torsionally coupled buildings using forced or ambient vibration data: I. Formulation and verification", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **41**, pp. 1609-1634 (2012).
15. Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice and Application*, Second Edition ed.: John Wiley & Sons, Inc. (2000).
16. Avitabile, P. "Structural dynamic test and experimental modal analysis tutorial notes", Modal Analysis and Control Laboratory, University of Massachusetts, Lowell (2004).
17. Harris, C.M. and Piersol, A.G., *Shock and Vibration Handbook*, Fifth ed.: McGraw-Hill Companies (2002).