دهمین سمینار احتمال و فرایندهای تصادفی
دانشگاه یزد
۲۸و۲۹مرداد ۱۳۹۴

استنباط گشتاورهای توزیع لامبدا تعمیم یافته چهار پارامتری بر اساس رکورد پایین

مهدی عمادی[1]، مریم اروجی [2]
دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: با توجه به کاربرد توزیع لامبدا تعمیم یافته چهار پارامتری در علوم اقتصادی، در این مقاله رکوردهای پایین این توزیع مورد توجه قرار گرفته اند. این توزیع براساس چندک تعریف شده ودارای پارامترهای مکان، مقیاس و دو پارامتر شکل است. گشتاورهای حاشیه ای و توأم رکوردهای پایین محاسبه شده اند. با بدست آوردن میانگین، واریانس و کوواریانس رکوردهای پایین، بهترین برآوردگرهای نااریب خطی قابل محاسبه هستند. در انتها، با یک مثال اهمیت میانگین، واریانس و کوواریانس رکورد پایین را در بدست آوردن بهترین برآوردگر نااریب خطی و مقایسه این برآوردگر با برآوردگرهای دیگر بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع لامبدا تعمیم یافته، رکورد پایین، گشتاور حاشیه ای و توأم، بهترین برآوردگر نااریب خطی، سری دوجمله ای
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62G30، 62E15، 62G05.

۱ مقدمه

رامبرگ و شمیزر (۱۹۷۴) توزیع لامبدا تعمیم یافته چهار پارامتری را به صورت توزیع چندکی

$$F^{-1}(p;\underline{\lambda}) = F^{-1}(p;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \lambda_1 + \lambda_2\{p^{\lambda_3} - (1-p)^{\lambda_4}\}, \qquad p \in [0,1] \qquad (1)$$

تعریف کرده اندکه در آن λ_1،λ_2 به ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس و λ_3، λ_4 پارامتر شکل می باشد. اگر حالت خاص $\lambda_1 = 0$ و$\lambda_2 = 1/\lambda$ و $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$را در نظر بگیرید توزیع لامبدا توکی بدست می آید.

تابع چگالی احتمال توزیع لامبدا تعمیم یافته در نقطه $x = F^{-1}(p)$ به صورت

$$f(x) = f(F^{-1}(p)) = \frac{\lambda_2^{-1}}{\lambda_3 p^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-p)^{\lambda_4 - 1}}, \qquad p \in [0,1]$$

بدست می آید که مقادیر قابل قبول $\underline{\lambda}$ در شرایط زیر صدق می کند:

$$f(x) \geq 0$$
$$\int f(x)dx = 1$$

[2] مریم اروجی : ma_orouji@stu.um.ac.ir

با در نظر گرفتن حالات خاص برای پارامترهای توزیع، توزیع های معروف آماری مانند لجستیک، نمایی، $U(۰,۲)$ بدست می آیند. برای مطالعه بیشتر به مقاله چلابی (۲۰۰۷) و رقب (۲۰۰۳) مراجعه کنید.

فرض کنید $\{X_i, i \geq ۱\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از جامعه ای با تابع توزیع مطلقاً پیوسته $F(x;\lambda)$ و تابع چگالی احتمال $f(x;\lambda)$ باشد. متغیر تصادفی X_j را یک رکورد پایین گوییم هرگاه به ازای $X_j < X_i, i = ۱,۲,..,j-۱$ باشد. بنابراین $X_۱$ یک رکورد پایین است. فرض کنید $L(n) = min\{j : j > L(n-۱), X_j < X_{L(n-۱)}\}$ ، $n > ۱$, $L(۱) = ۱$ باشد. آنگاه $X_{L(n)}, n \geq ۱$ دنباله مقادیر رکورد پایین را نشان می دهد. مطالعات قابل ملاحظه ای روی رکوردها و آماره های مربوطه انجام شده است علاقه مندان می توانند به کتاب های آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) و ناگاراجا (۱۹۸۸) مراجعه نمایند. در ابتدا گشتاورهای حاشیه ای و توأم رکوردهای پایین بدست آمده اند. محاسبات عددی میانگین، واریانس و کوواریانس در جداول ۱ و ۲ برای توزیع لامبدا توکی نشان داده شده است. در ادامه مثال ذکر شده کاربرد میانگین، واریانس و کوواریانس را در بدست آوردن BLUE نشان می دهد.

۲ گشتاورهای رکورد پایین

تابع چگالی حاشیه ای $X_{L(n)}$ ، $n \geq ۱$ به صورت

$$f_{L_n}(x) = \frac{[-lnF(x)]^{n-۱}}{\Gamma(n)} f(x) \tag{۲}$$

است که در آن $\Gamma(x)$ تابع گاما می باشد وقتی x مقادیر صحیح مثبت را می گیرد $\Gamma(x) = (x-۱)!$.

از رابطه (۲) گشتاور اول n امین رکورد پایین به صورت

$$\alpha_n = E(X_{L(n)}) = \frac{۱}{\Gamma(n)} \int_۰^\infty x\,(-lnF\,(x))^{n-۱}\, f\,(x)\ \mathrm{d}x$$

نوشته می شود و با تغییر متغیر $x = F^{-۱}(u)$ به صورت

$$\alpha_n = \frac{۱}{\Gamma(n)} \int_۰^۱ F^{-۱}(u)\,(-lnu)^{n-۱}\ \mathrm{d}u$$

بدست می آید. با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه فوق و با در نظر گرفتن توزیع استاندارد $(\lambda_۱ = ۰, \lambda_۲ = ۱)$ داریم

$$\begin{aligned}\alpha_n =& \frac{۱}{\Gamma(n)} \int_۰^۱ (u^{\lambda_۳} - (۱-u)^{\lambda_۴})\,(-lnu)^{n-۱}\ \mathrm{d}u \\ =& \frac{۱}{\Gamma(n)} \int_۰^۱ u^{\lambda_۳}\,(-lnu)^{n-۱}\ \mathrm{d}u \\ &- \frac{۱}{\Gamma(n)} \int_۰^۱ (۱-u)^{\lambda_۴}\,(-lnu)^{n-۱}\ \mathrm{d}u\end{aligned} \tag{۳}$$

همچنین از سری دوجمله ای $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k, |x|<1$ به ازای $x=-u$ و $n=\lambda_4$ و جایگذاری در انتگرال دوم رابطه (۳) و تغییر متغیر $u=\mathrm{e}^{-x}$ در رابطه، گشتاور اولn امین رکورد پایین از توزیع لامبدا تعمیم یافته به صورت

$$\alpha_n=\frac{1}{(\lambda_3+1)^n}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{(k+1)^n} \tag{۴}$$

بدست می آید که در آن $C_k=\frac{\lambda_4(\lambda_4-1)..(\lambda_4-k+1)}{k!}(-1)^k$.

تابع چگالی توأم نخستین n رکورد پایین به صورت

$$f_{L_1,L_2,..,L_n}(x_1,x_2,..,x_n)=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)}{F(x_i)}f(x_n) \tag{۵}$$

تعریف می شود.

همچنین گشتاور دوم n امین رکورد پایین از رابطه (۵) به صورت

$$\alpha_n^{(2)}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^1\Big(F^{-1}(u)\Big)^2(-lnu)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

بدست می آید.

گشتاور دوم n امین رکورد پایین به طور مشابه به صورت

$$\begin{aligned}\alpha_n^{(2)}=&\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^1\left(u^{\lambda_3}-(1-u)^{\lambda_4}\right)^2(-lnu)^{n-1}\,\mathrm{d}u\\=&\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^1 u^{2\lambda_3}(-lnu)^{n-1}\,\mathrm{d}u\\&+\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^1((1-u)^{\lambda_4})^2(-lnu)^{n-1}\,\mathrm{d}u\\&-\frac{2}{\Gamma(n)}\int_0^1 u^{\lambda_3}(1-u)^{\lambda_4}(-lnu)^{n-1}\,\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{۶}$$

با جایگذاری سری دوجمله ای به ازای $x=-u$ و $n=2\lambda_4$ در انتگرال دوم و $n=\lambda_4$ در انتگرال سوم رابطه (۶) و تغییر متغیر $u=\mathrm{e}^{-x}$ ، گشتاور دومn امین رکورد پایین به صورت

$$\alpha_n^{(2)}=\frac{1}{(2\lambda_3+1)^n}+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_j*C_k}{(j+k+1)^n}-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k}{(\lambda_3+k+1)^n} \tag{۷}$$

بدست می آید.

تابع چگالی توأم n امین و m امین رکورد پایین$(1\le n<m)$ به صورت

$$f_{L_n,L_m}(x,y)=\frac{[-lnF(x)]^{n-1}}{\Gamma(n)}\frac{[lnF(x)-lnF(y)]^{m-n-1}}{\Gamma(m-n)}\frac{f(x)}{F(x)}f(y),\qquad -\infty<y<x<\infty \tag{۸}$$

می باشدکه گشتاور توأم آن به صورت

$$\alpha_{n,m} = E(X_{L(n)}X_{L(m)}) = \int_۰^۱ \int_۰^u F^{-۱}(u)F^{-۱}(v)\frac{(-lnu)^{n-۱}}{\Gamma(n)}\frac{(lnu-lnv)^{m-n-۱}}{\Gamma(m-n)}\frac{۱}{u}\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

است که در آن $۱ > u > v > ۰$است. به طور مشابه گشتاور توأم n امین و m امین رکورد پایین به صورت

$$\alpha_{n,m} = \int_۰^۱ \int_۰^u \left(u^{\lambda_۳} - (۱-u)^{\lambda_۴}\right)\left(v^{\lambda_۳} - (۱-v)^{\lambda_۴}\right)\frac{(-lnu)^{n-۱}}{\Gamma(n)}\frac{(lnu-lnv)^{m-n-۱}}{\Gamma(m-n)}\frac{۱}{u}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \qquad (۹)$$

انتگرال داخلی عبارت (۹) را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\int_۰^u \left(v^{\lambda_۳} - (۱-v)^{\lambda_۴}\right)\frac{(lnu-lnv)^{m-n-۱}}{\Gamma(m-n)}\frac{۱}{u}\mathrm{d}v$$

با تغییر متغیر $v = tu$ در انتگرال فوق داریم

$$\int_۰^۱ \left((tu)^{\lambda_۳} - (۱-tu)^{\lambda_۴}\right)\frac{(lnu-ln\,(tu))^{m-n-۱}}{\Gamma(m-n)}\mathrm{d}t = u^{\lambda_۳}\frac{۱}{(\lambda_۳+۱)^{m-n}} - \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{u^k * C_k}{(k+۱)^{m-n}}$$

با قرار دادن رابطه فوق در عبارت (۹) داریم

$$\int_۰^۱ \left(u^{\lambda_۳} - (۱-u)^{\lambda_۴}\right)\frac{(-lnu)^{n-۱}}{\Gamma(n)}\left[u^{\lambda_۳}\frac{۱}{(\lambda_۳+۱)^{m-n}} - \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{u^k * C_k}{(k+۱)^{m-n}}\right]\mathrm{d}u$$

که به صورت زیر ساده می شود

$$\begin{aligned}\alpha_{n,m} =& \frac{۱}{(\lambda_۳+۱)^{m-n}}\left[\frac{۱}{(۲\lambda_۳+۱)^n} - \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{C_k}{(\lambda_۳+k+۱)^n}\right] \\ &- \sum_{k=۰}^{\infty}\frac{C_k}{(k+۱)^{m-n}}\left(\frac{۱}{(\lambda_۳+k+۱)^n} - \sum_{j=۰}^{\infty}\frac{C_j}{(j+k+۱)^n}\right)\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

نتیجه ۱.۲. با جایگذاری رابطه های (۴)، (۷) و (۱۰) در عبارات زیر

$$\mu_n = \alpha_n, \qquad \sigma_n^{۲} = \alpha_n^{(۲)} - \alpha_n^{۲}, \qquad \sigma_{n,m} = \alpha_{n,m} - \alpha_n\alpha_m; \qquad ۱ \leqslant m < n$$

میانگین، واریانس و کوواریانس رکوردها قابل محاسبه هستند. این محاسبات توسط یک نرم افزار ریاضی (*Maple*) انجام شده است و نتایج در جدول ۱ و ۲ به ترتیب برای میانگین، واریانس و کوواریانس وقتی توزیع توکی $\lambda_۱ = ۰$، $\lambda_۲ = ۱/\lambda$ و $\lambda_۳ = \lambda_۴ = \lambda$ باشد، نشان داده شده است. مقادیر جدول ۱ به ازای $\lambda = ۱(۰/۵)۴$ و $n = ۱(۱)۵$ و مقادیر جدول ۲ به ازای $\lambda = ۱(۰/۵)۴$ و $n = ۱(۱)۵$، $m = n(۱)۵$ با دقت ۵ رقم اعشار محاسبه شده اند.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید نخستین n رکورد پایین توزیع لامبدا تعمیم یافته با رابطه(۱) به صورت $Y_{L(۱)}, Y_{L(۲)}, ..., Y_{L(n)}$، همچنین $X_{L(۱)}, X_{L(۲)}, ..., X_{L(n)}$نخستین n رکورد پایین توزیع لامبدای تعمیم یافته استاندارد باشد، داریم:

$$X_{i:n} = \frac{(Y_{i:n} - \lambda_۱)}{\lambda_۲}, \qquad i = ۱, ۲, .., n$$

مثال ۳.۲. فرض کنید مشاهدات زیر از $GLD(\lambda_۱, \lambda_۲, ۲/۵, ۲/۵)$ شبیه سازی شده باشند.

۱۹/۲۳۴۸۱	۱۴/۵۵۳۵۶	۱۷/۷۴۶۶۱	۲۱/۱۴۶۶۹	۱۵/۸۳۵۷۹
۲۵/۱۶۴۶۰	۱۵/۰۳۳۸۳	۱۱/۰۵۴۱۹	۱۷/۷۲۸۰۳	۲۵/۱۷۸۸۹

مقادیر رکورد پایین برای مشاهدات به صورت زیر است:

۱۱/۰۵۴۱۹	۱۴/۵۵۳۵۶	۱۵/۸۳۵۷۹

بنابراین $\underline{\alpha}$ و V برای مقادیر رکورد پایین به ازای $n = ۳$، $\lambda_۳ = \lambda_۴ = ۲/۵$ از جداول ۱ و ۲ به دست می آیند. در نتیجه بهترین برآوردگرهای نااریب خطی برای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ از روابط (۱۱) به صورت

$$\hat{\lambda_۱} = ۲۱/۰۷۱۵۵ \qquad \hat{\lambda_۲} = ۱۵/۸۹۵۷۶$$

و همچنین واریانس و کوواریانس این برآوردگرها از روابط (۱۲) به صورت

$$Var(\hat{\lambda_۱}) = ۰/۹۷۳۳۱\lambda_۲^۲ \qquad Var(\hat{\lambda_۲}) = ۳/۹۷۳۶۱\lambda_۲^۲ \qquad Cov(\hat{\lambda_۱}, \hat{\lambda_۲}) = ۱/۵۳۲۹۵\lambda_۲^۲$$

هستند. فرض کنید میانگین جامعه یه صورت $\zeta = E(Y) = \lambda_۱ + E(X)\lambda_۲$ باشد. در نتیجه $\zeta^* = \bar{Y_L}$ میانگین مشاهدات رکوردی است. برای مقادیر رکورد داده شده $\zeta^* = ۱۳/۸۱۴۵۱$ و خطای استاندارد آن $S.E.(\zeta^*) = ۲/۲۳۵۴۱$ است. *BLUE* برای ζ عبارتست

از $\hat{\zeta} = \hat{\lambda_1} + E(X)\hat{\lambda_2} =$ و خطای استاندارد آن $S.E.(\hat{\zeta}) =$ ۱/۸۰۶۸۳ است. بر اساس خطای استاندارد $BLUE$ بهتر از میانگین مشاهدات است.

جدول ۱: میانگین رکوردهای پایین توزیع لامبدای توکی.

n	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 2/5$	$\lambda = 3$	$\lambda = 3/5$	$\lambda = 4$
۱	۰.۴۶۸۷۵-	۰.۵۵۴۷۴-	۰.۴۵۳۷۱-	۰.۴۶۵۹۶-	۰.۶۶۷۶۲-	۰.۰۰۰۰۰	۰.۶۹۶۱۱-
۲	۰.۷۱۸۷۵-	۰.۷۹۴۷۴-	۰.۶۷۵۹۳-	۰.۶۷۰۰۴-	۰.۸۵۵۱۲-	۰.۴۳۶۹۱-	۰.۸۵۶۱۱-
۳	۰.۸۴۳۷۵-	۰.۸۹۰۷۴-	۰.۷۵۰۰۰-	۰.۷۲۸۳۵-	۰.۹۰۲۰۰-	۰.۶۸۱۷۳-	۰.۸۸۸۱۱-
۴	۰.۹۰۶۲۵-	۰.۹۲۹۱۴-	۰.۷۷۴۶۹-	۰.۷۴۵۰۱-	۰.۹۱۳۷۱-	۰.۸۲۴۷۴-	۰.۸۹۴۵۱-
۵	۰.۹۳۷۵۰-	۰.۹۴۴۵۰-	۰.۹۳۷۵۰-	۰.۹۲۷۳۷-	۰.۹۱۶۶۴-	۰.۹۰۶۰۴-	۸۹۵۷۹.-

بهترین برآوردگرهای نااریب خطی(BLUE's) پارامترهای مکان λ_1و مقیاس λ_2 به صورت ترکیب خطی رکوردهای پایین نمونه تصادفی $Y_1, Y_2, .., Y_n$ نوشته می شود (ناگاراجا (۱۹۸۸)) که به صورت

$$\hat{\lambda_1} = \underline{a}^{'}\underline{X} = a_1 Y_{L(1)} + a_2 Y_{L(2)} + ... + a_n Y_{L(n)}$$
$$\hat{\lambda_2} = \underline{b}^{'}\underline{X} = b_1 Y_{L(1)} + b_2 Y_{L(2)} + ... + b_n Y_{L(n)} \tag{11}$$

می باشد که در آن

$$\underline{a}^{'} = -\underline{\alpha}^{'}V^{-1}(\underline{1}\underline{\alpha}^{'} - \underline{\alpha}\underline{1}^{'})V^{-1}/\Delta,$$
$$\underline{b}^{'} = \underline{1}^{'}V^{-1}(\underline{1}\underline{\alpha}^{'} - \underline{\alpha}\underline{1}^{'})V^{-1}/\Delta;$$
$$\Delta = (\underline{1}^{'}V^{-1}\underline{1})(\underline{\alpha}^{'}V^{-1}\underline{\alpha}) - (\underline{1}^{'}V^{-1}\underline{\alpha})^2.$$

واریانس و کوواریانس این برآوردگرها برای توزیع لامبدای تعمیم یافته استاندارد به صورت زیر است:

$$Var(\hat{\lambda_1}) = \lambda_2^2(\underline{\alpha}^{'}V^{-1}\underline{\alpha})/\Delta, \qquad Var(\hat{\lambda_2}) = \lambda_2^2(\underline{1}^{'}V^{-1}\underline{1})/\Delta,$$
$$Cov(\hat{\lambda_1}, \hat{\lambda_2}) = -\lambda_2^2(\underline{1}^{'}V^{-1}\underline{\alpha})/\Delta. \tag{12}$$

جدول ۲: واریانس وکوواریانس رکوردهای پایین توزیع لامبدای توکی.

m n	$\lambda =$ ۱	$\lambda =$ ۱٫۵	$\lambda =$ ۲	$\lambda =$ ۲٫۵	$\lambda =$ ۳	$\lambda =$ ۳٫۵	$\lambda =$ ۴
۱ ۱	۰.۶۱۲۳۹	۰.۴۸۴۸۰	۰.۳۷۲۴۳	۰.۳۲۱۵۴	۰.۲۸۵۰۳	۰.۲۴۳۲۹	۰.۲۲۲۱۱
۲ ۱	۰.۴۳۰۸۷	۰.۴۰۰۲۱	۰.۳۶۸۷۴	۰.۳۴۶۱۱	۰.۳۲۵۰۸	۰.۳۰۴۲۳	۰.۲۸۶۹۴
۳ ۱	۰.۴۴۶۹۳	۰.۴۵۶۲۲	۰.۴۵۷۸۶	۰.۴۵۶۱۸	۰.۴۵۰۴۷	۰.۴۴۲۰۷	۰.۴۳۲۸۴
۴ ۱	۰.۴۶۷۲۹	۰.۵۱۱۴۱	۰.۵۳۸۷۱	۰.۵۵۴۷۸	۰.۵۶۲۷۹	۰.۵۶۵۵۲	۰.۵۶۴۹۸
۵ ۱	۰.۴۸۱۵۹	۰.۵۴۹۵۴	۰.۵۹۳۸۶	۰.۶۲۲۶۸	۰.۶۴۱۲۳	۰.۶۵۳۰۰	۰.۶۶۰۲۲
۲ ۲	۰.۴۷۳۵۱	۰.۳۶۸۴۸	۰.۲۷۳۵۴	۰.۲۳۵۸۷	۰.۲۰۹۶۰	۰.۱۷۷۶۳	۰.۱۶۱۳۷
۳ ۲	۰.۵۲۸۱۰	۰.۵۱۰۳۱	۰.۴۷۶۳۳	۰.۴۴۷۰۹	۰.۴۱۸۹۰	۰.۳۹۱۶۰	۰.۳۶۸۲۴
۴ ۲	۰.۶۲۹۸۰	۰.۶۵۰۰۶	۰.۶۴۳۶۹	۰.۶۲۹۴۳	۰.۶۱۰۹۹	۰.۵۹۱۰۶	۰.۵۷۱۶۲
۵ ۲	۰.۶۸۶۸۱	۰.۷۳۶۰۱	۰.۷۵۱۶۸	۰.۷۵۲۹۳	۰.۷۴۶۷۰	۰.۷۳۶۷۵	۰.۷۲۵۱۵
۳ ۳	۰.۴۴۱۱۰	۰.۳۵۹۸۲	۰.۲۷۵۸۰	۰.۲۴۳۴۵	۰.۲۱۹۸۴	۰.۱۹۱۸۷	۰.۱۷۳۴۵
۴ ۳	۰.۶۱۳۷۵	۰.۵۸۷۴۸	۰.۵۴۲۸۶	۰.۵۰۵۲۰	۰.۴۷۰۷۶	۰.۴۳۹۱۱	۰.۴۱۱۹۰
۵ ۳	۰.۷۳۹۷۵	۰.۷۴۵۴۳	۰.۷۲۴۵۳	۰.۶۹۹۳۸	۰.۶۷۳۱۱	۰.۶۴۷۵۷	۰.۶۲۳۸۸
۴ ۴	۰.۴۳۷۲۵	۰.۳۶۸۰۲	۰.۲۸۷۷۶	۰.۲۵۶۳۹	۰.۲۳۲۷۲	۰.۲۰۵۷۸	۰.۱۸۵۲۸
۵ ۴	۰.۶۶۸۹۲	۰.۶۲۹۵۴	۰.۵۷۶۴۷	۰.۵۳۳۸۰	۰.۴۹۶۲۹	۰.۴۶۲۷۷	۰.۴۳۳۹۶
۵ ۵	۰.۸۹۱۴۷	۰.۹۰۳۴۰	۰.۸۹۱۴۷	۰.۸۷۴۹۵	۰.۸۵۸۱۶	۰.۸۴۲۱۳	۰.۸۲۷۰۹

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، گشتاورهای رکورد پایین توزیع لامبدا تعمیم یافته به دست آمده اند. مقادیر میانگین، واریانس و کوواریانس رکوردهای پایین توزیع لامبدا توکی در جداول ۱ و ۲ برای محاسبه BLUE پارامترهای مکان و مقیاس توزیع لامبدا تعمیم یافته مورد استفاده قرار گرفته اند.

مراجع

Arnold, B. C., Balakrishnan, N., Nagaraja, H. N., (1998). *Records*. Wiley, New York.

Chalabi, Y., Scott, D. J., Wuertz, D., (2007). *The Generalized Lambda Distribution as an Alternative to Model Financial Returns*,

Nagaraja, H. N., 1988. Record values and related statistics-a review. *Communication in Statistics-Theory and Methods*. **17**, 2223-2238.

Raqab, M. z., 2003. American Journal of Mathematical and Management Sciences. *Order Statistics and Parameter Estimation in the Generalized Lambda Ditribution*. **23:1-2**, 183-202.