

بررسی تأثیر جرم لینک‌ها در تحلیل دینامیک معکوس ربات گوف - استوارت به روش لاگرانژ

سید ناصر مستشیری^۱، علیرضا اکبرزاده توتونچی^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک - طراحی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، mostashiri@hotmail.com

^۲ استاد گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، ali_akbarzadeh_t@yahoo.com

چکیده

مسئله دینامیک معکوس ربات شامل یافتن بردار گشتاورهای مورد نیاز در مفاصل ربات با معلوم بودن مسیر^۱ طی شده توسط عملگر نهایی^۲ آن است. در این مقاله به حل مسئله دینامیک معکوس ربات موازی گوف - استوارت^۳، با استفاده از روش لاگرانژ با فرض اینکه جرم لینک‌ها در مرکز جرم آن‌ها متمرکز شده‌اند پرداخته شده است. ابتدا دینامیک معکوس با صرف نظر کردن از جرم لینک‌ها در مقابل جرم صفحه‌ی متحرک محاسبه شده است. سپس با فرض مذکور مسئله به صورت تحلیلی حل شده است. در ادامه ربات در دو نرم‌افزار آدامز^۴ و سالیدورکز^۵ مدل شده و مدل‌ها اعتبارسنجی شده‌اند. در مرحله بعد نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج تحلیل کامل ربات در نرم‌افزار آدامز مقایسه شده و دقت حل سنجیده شده است. نتایج حاکی از آن است که در نظر نگرفتن جرم لینک‌های ربات خطای بسیار زیادی را در پی دارد. اما نتایج حاصل از فرض جرم لینک‌ها به صورت متمرکز با دقت مناسبی با نتایج نرم‌افزار آدامز همخوانی دارد.

واژه‌های کلیدی

ربات موازی، گوف - استوارت، دینامیک معکوس، روش لاگرانژ

مقدمه

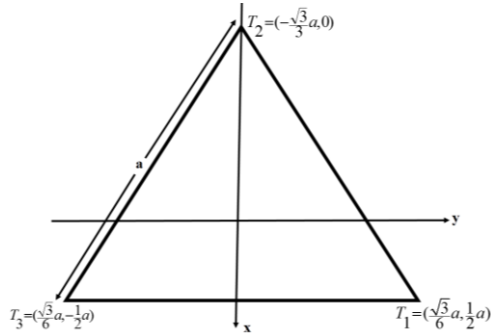
ربات‌های موازی معمولاً شامل یک صفحه‌ی متحرک و یک پایه‌ی ثابت هستند، که توسط چند لینک به یکدیگر متصل شده‌اند. در حالت کلی در این ربات‌ها تعداد مفاصل محرک^۶ با تعداد درجات آزادی ربات برابر است. ربات‌های موازی مزایای زیادی از قبیل، نسبت بار به وزن^۷ بالا، صلبیت^۸ بیشتر، ابعاد کوچک‌تر، دقت بیشتر و چالاکی^۹ زیاد، نسبت به ربات‌های سری دارند. ربات گوف - استوارت نیز یک سیستم موازی با شش درجه آزادی می‌باشد. این ربات نخستین بار در سال ۱۹۶۵ توسط استوارت [۱] پیشنهاد شد. از جمله کاربردهای این ربات می‌توان به مواردی مانند شبیه‌سازی پرواز

و اتومبیل، ماشینکاری با دقت بالا، کاربرد در تجهیزات پزشکی، صنایع دریایی، فضایی و نظامی اشاره کرد. حل سینماتیک و دینامیک این ربات بسیار پیچیده است. معمولاً مسئله سینماتیک به دو بخش مستقیم و معکوس تقسیم می‌شود. در مورد ربات‌های موازی بخش سینماتیک مستقیم پیچیده‌تر است [۲]. همچنین مدل دینامیکی سیستم را می‌توان به دو قسمت مستقیم و معکوس تقسیم کرد. دینامیک معکوس برای کنترل سیستم و دینامیک مستقیم برای شبیه‌سازی سیستم اهمیت دارد. روش‌های مختلفی برای بررسی دینامیک ربات‌ها معرفی شده است که عمدتاً شامل روش‌هایی مانند، ۱- نیوتن - اولر [۳-۴]، که مستلزم محاسبه‌ی تمام نیروها و ممان‌های قید بین لینک‌ها می‌باشد. ۲- اصل کار مجازی [۵-۶]، که در آن برخلاف روش اولر نیازی به محاسبه‌ی نیروها و ممان‌های بین لینک‌ها نمی‌باشد، لذا این روش نسبت به روش نیوتن - اولر سریع‌تر است. ۳- لاگرانژ [۷-۹]، که با استفاده از مفهوم کار و انرژی به توصیف سیستم مکانیکی می‌پردازد. منظور از کنترل هر فرآیندی، رسیدن به اهداف مطلوب می‌باشد. از اهداف کنترلی مطلوب می‌توان به سرعت پاسخ^{۱۰}، خطاهای حالت دائم^{۱۱}، کاهش معیارهای خطا^{۱۲} اشاره کرد. با توجه به اینکه مدل دقیقی از اکثر سیستم‌ها موجود نمی‌باشد، روش‌های مختلفی برای کنترل آن‌ها پیشنهاد شده است. یکی از این روش‌ها، کنترل مبتنی بر مدل^{۱۳} می‌باشد. در طراحی این روش کنترلی، چهار مرحله‌ی، ۱- ارائه‌ی مدل سیستم اصلی، ۲- تحلیل و سنتز^{۱۴} کنترل‌کننده، ۳- شبیه‌سازی کنترل‌کننده و سیستم اصلی، ۴- تجمع تمام مراحل قبل به منظور گسترش کنترل‌کننده و سیستم اصلی انجام می‌شود. هدف از روش‌های کنترل مبتنی بر مدل، استفاده از مدل فرآیند در طراحی کنترل‌کننده می‌باشد. در این روش سعی می‌شود پارامترهای طراحی بهبود یابند [۱۰]. یکی دیگر از روش‌های کنترلی، روش‌های کنترل مبتنی بر پیش‌بینی مدل می‌باشند^{۱۵}. در فرآیندهایی که مدل اصلی پیچیده است و نمی‌توان مدل ریاضی دقیقی برای آن‌ها یافت و یا مدل ریاضی دقیق مورد نیاز نیست، بهترین روش، استفاده از کنترل‌کننده‌های پیش بین نظیر اسمیت^{۱۶} است. این روش با افزایش

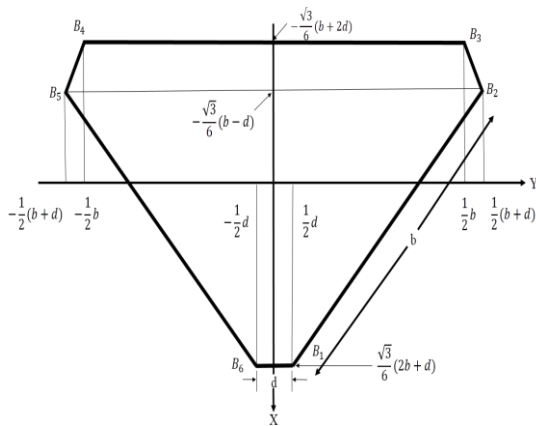
^{۱۰} Time response
^{۱۱} Steady state error
^{۱۲} Error criteria
^{۱۳} Model-based control
^{۱۴} Synthesis
^{۱۵} Model predictive control
^{۱۶} Smith

^۱ Trajectory
^۲ End effector
^۳ Gough-Stewart
^۴ ADAMS
^۵ SOLIDWORKS
^۶ Actuated joints
^۷ Force-to-weight ratio
^۸ Rigidity
^۹ Dexterity

ابعاد فیزیکی صفحه‌ی متحرک و پایه‌ی ثابت ربات و همچنین مختصات رأس‌های آن‌ها بر حسب دستگاه‌های مختصات XYZ و xyz به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده است.



شکل ۳: ابعاد فیزیکی و مختصات رأس‌های صفحه‌ی متحرک



شکل ۴: ابعاد فیزیکی و مختصات رأس‌های پایه‌ی ثابت

سینماتیک معکوس

در مسئله‌ی سینماتیک معکوس، با معلوم بودن موقعیت و جهت صفحه‌ی متحرک، طول لینک‌های متناظر یافته می‌شود. با توجه به شکل ۳، مختصات رأس‌های صفحه‌ی متحرک در دستگاه مختصات محلی واقع در آن بدست می‌آید. همچنین با توجه به شکل ۴، می‌توان مختصات رأس‌های پایه‌ی ثابت در دستگاه مختصات محلی واقع در آن را بیان نمود.

انتقال همگن^۸ از دستگاه مختصات صفحه‌ی متحرک به دستگاه مختصات پایه‌ی ثابت توسط ماتریس انتقال زیر انجام می‌شود.

$${}^{Base}_{Top}R = R(Y, \beta)R(X, \alpha)R(z, \gamma) \quad (1)$$

$${}^{Base}_{Top}T = \begin{bmatrix} C\beta C\gamma + S\alpha S\beta S\gamma & -C\gamma S\gamma + S\alpha S\beta C\gamma & C\alpha S\beta & X \\ C\alpha S\gamma & C\alpha C\gamma & -S\alpha & Y \\ -S\beta C\gamma + S\alpha C\beta S\gamma & S\beta S\gamma + S\alpha C\beta C\gamma & C\alpha C\beta & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

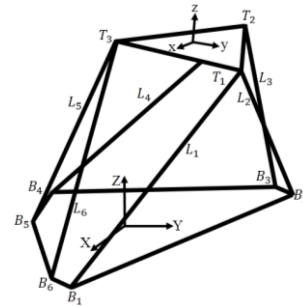
اکنون می‌توان مختصات رأس‌های صفحه‌ی متحرک را در دستگاه مختصات XYZ با توجه به رابطه‌ی (۳) محاسبه کرد.

پس از محاسبه‌ی مختصات رأس‌های صفحه‌ی متحرک و پایه‌ی ثابت در دستگاه مختصات XYZ ، با توجه به رابطه‌ی هندسی (۴)

مفاهیم پیش بین و کاهش دادن اثر خطاهایی که به علت تأخیر زمانی، فیدبک^۱ می‌شوند، مشکلات کنترلی را حل می‌کند [۱۱]. با توجه به مطالب ذکر شده یکی از اهداف جانبی این مقاله استفاده از مدل دینامیکی حاصل به منظور استفاده در روش‌های کنترلی است. ساختار پژوهش حاضر به شرح زیر است، ابتدا هندسه‌ی ربات مورد مطالعه توضیح داده شده است. سپس به بررسی سینماتیک معکوس و بدست آوردن ماتریس ژاکوبین^۲ پرداخته شده است. در ادامه با استفاده از روش لاگرانژ دینامیک ربات فرمولبندی شده و در نهایت نتایج پژوهش مورد بحث و نتیجه‌گیری قرار گرفته است.

هندسه‌ی ربات

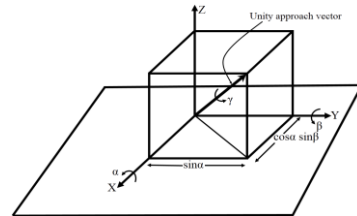
با توجه به شکل ۱، پایه‌ی ثابت یک شش وجهی نیمه منظم و صفحه‌ی متحرک مثلث متساوی الاضلاع است. پایه‌ی ثابت توسط مفاصل یونیورسال^۳ و صفحه‌ی متحرک توسط مفاصل کروی^۴ به شش لینک با طول‌های متغیر متصل شده‌اند. دستگاه مختصات XYZ در مرکز پایه‌ی ثابت واقع شده و دستگاه مختصات xyz در مرکز گرانج صفحه‌ی متحرک با محور Z عمود بر صفحه واقع شده است. طول بازوها L_1 تا L_6 مشخص شده‌اند.



شکل ۱: هندسه‌ی ربات

موقعیت^۵ مرکز دستگاه XYZ در دستگاه پایه‌ی ثابت با نمایش داده شده است.

برای تعیین جهت^۶، از زوایای اولر^۷ معمولی استفاده نشده است. بلکه با چرخش دستگاه مختصات بالایی به ترتیب حول محور ثابت X به اندازه‌ی α درجه، سپس حول محور ثابت Y به اندازه‌ی β درجه و در نهایت حول محور Z به اندازه‌ی γ درجه تعریف شده است. جهت مثبت زوایای چرخش در شکل ۲ مشخص شده‌اند.



شکل ۲: زوایای چرخش

- Feedback^۱
- Jacobian matrix^۲
- Universal joints^۳
- Spherical joints^۴
- Location^۵
- Orientation^۶
- Euler angles^۷

می توان مقادیر L_i ها را بدست آورد. این مقادیر همان نتایج حل سینماتیک معکوس ربات می باشند.

می توان مقادیر L_i ها را بدست آورد. این مقادیر همان نتایج حل سینماتیک معکوس ربات می باشند.

$$\begin{bmatrix} X_{Tj} \\ Y_{Tj} \\ Z_{Tj} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{Base}_{Top}T(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} X_{Tj} \\ Y_{Tj} \\ Z_{Tj} \\ 1 \end{bmatrix} \quad j=1,2,3 \quad (3)$$

$$L_i = \sqrt{(X_{Tj} - X_{Bi})^2 + (Y_{Tj} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Tj} - Z_{Bi})^2} \quad (4)$$

برای مطالعه ی بیشتر در مورد سینماتیک معکوس، می توانید به [۲] مراجعه نمایید.

ماتریس ژاکوبین

رابطه ی (۳) مختصات رأس های صفحه ی متحرک را بر حسب موقعیت و جهت مرکز صفحه ی متحرک، در دستگاه مختصات متصل به پایه ی ثابت بیان می کند. L_i ها نیز بر حسب مختصات رأس های صفحه ی متحرک با استفاده از رابطه ی (۴) بیان می شوند. مختصات رأس های صفحه ی متحرک به صورت زیر،

مختصات رأس های صفحه ی متحرک به صورت زیر،
 $q_T = [X_{T1}, Y_{T1}, Z_{T1}, X_{T2}, Y_{T2}, Z_{T2}, X_{T3}, Y_{T3}, Z_{T3}]^T$
 و موقعیت و جهت مرکز صفحه ی متحرک این گونه تعریف می شود.

$$q = [X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma]^T$$

به منظور یافتن رابطه ی بین سرعت لینک ها و سرعت در فضای کارترین می توان از دو طرف تساوی در معادلات حاصل از دو رابطه ی (۳) و (۴) بر حسب زمان مشتق گرفت.

$$\dot{L} = J_1(q) \dot{q}_T \quad (5)$$

$$\dot{q}_T = J_2(q) \dot{q} \quad (6)$$

از ترکیب معادلات (۵) و (۶)،

$$\dot{L} = J_1(q) J_2(q) \dot{q} \quad (7)$$

بنابراین ماتریس ژاکوبین به صورت رابطه ی (۸) بدست می آید.

$$J(q) = J_1(q) J_2(q) \quad (8)$$

مدل دینامیکی

می توان معادلات حرکت را با استفاده از رابطه ی لاگرانژ بدست آورد.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial P(q)}{\partial q} = \tau \quad (9)$$

که در آن $K(q, \dot{q})$ و $P(q)$ به ترتیب انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل و q مختصات عمومی می باشند.

معادله ی دینامیکی بدست آمده از رابطه ی (۹) را می توان به صورت زیر نوشت [۸].

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = J^T F \quad (10)$$

در رابطه ی فوق، $M(q)$ ، $C(q, \dot{q})$ و $G(q)$ به ترتیب ماتریس های اینرسی^۱، کریولیس - سانتریفیوژ^۲ و گرانش^۳ هستند. و

^۱ Inertia

^۲ Coriolis-Centrifugal

^۳ Gravity

محاسبه انرژی جنبشی صفحه ی متحرک

انرژی جنبشی صفحه ی متحرک، برابر با مجموع انرژی های جنبشی انتقالی و دورانی آن است.

$$K_{Platform} = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{o,xyz}^T I \bar{\Omega}_{o,xyz} \quad (11)$$

در رابطه فوق، m جرم صفحه ی متحرک، I تانسور اینرسی مثلث، حول دستگاه متصل به مرکز جرم صفحه ی متحرک و $\bar{\Omega}_{o,xyz}$ سرعت زاویه ای صفحه ی متحرک است که در همان دستگاه متصل به صفحه ی متحرک تعریف شده است. سرعت زاویه ای صفحه ی متحرک در دستگاه ثابت پایین به صورت زیر بیان می شود.

$$\bar{\Omega}_{o,xyz} = \dot{\beta} \bar{j} + \dot{\alpha} R_y(\beta) \bar{i} + \dot{\gamma} R_y(\beta) R_x(\alpha) \bar{k} \quad (12)$$

با توجه به ماتریس های دوران می توان سرعت زاویه ای را در دستگاه متصل به صفحه ی متحرک بدست آورد.

$$\bar{\Omega}_{o,xyz} = R_z^T(\gamma) R_x^T(\alpha) R_y^T(\beta) \dot{\beta} \bar{j} + R_z^T(\gamma) R_x^T(\alpha) \dot{\alpha} \bar{i} + R_z^T(\gamma) \dot{\gamma} \bar{k} \quad (13)$$

حال می توان انرژی جنبشی کل صفحه ی متحرک را محاسبه نمود.

محاسبه انرژی پتانسیل صفحه ی متحرک

$$P_{platform} = m g Z \quad (14)$$

در این رابطه، g شتاب گرانش و Z ارتفاع مرکز جرم صفحه ی متحرک است.

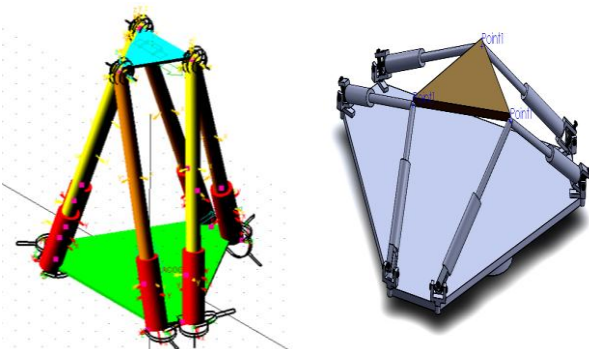
در این مرحله بدون در نظر گرفتن جرم لینک ها، برای ابعاد و اندازه های فیزیکی زیر و همچنین مسیر q ، نیروهای لازم جهت دنبال کردن مسیر محاسبه می شود.

$$a = 0.2 \text{ (m)}, b = 0.4 \text{ (m)}, d = 0.1 \text{ (m)}, m = 1.36 \text{ (kg)}$$

$$g = 9.8066 \text{ (m/s}^2\text{)}, \omega = 2 \text{ (rad/s)}$$

$$q = [-0.1, 0.1 \sin(\omega t), 0.7, 0, 0, 0]^T$$

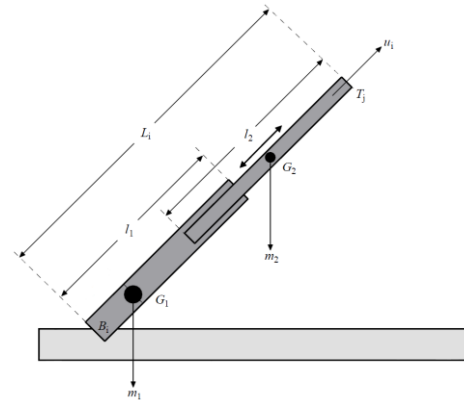
سپس ربات در دو نرم افزار مدل شده (شکل ۵) و صحت حل تحلیلی آن اثبات می شود.



شکل ۵: مدل ربات در نرم افزارهای سالدورکز و آدامز

محاسبه‌ی انرژی جنبشی لینک‌ها

مطالعه‌ی دقیق دینامیک لینک‌ها، مستلزم تجزیه‌ی لینک به دو قسمت ثابت و متحرک به عنوان دو جسم با دو اینرسی منحصر بفرد می‌باشد (شکل ۶).



شکل ۶: لینک ربات گوف - استوارت

این کار باعث پیچیدگی زیادی در فرمول‌بندی معادلات دینامیکی می‌شود. لذا به عنوان یک ساده‌سازی، می‌توان هر لینک را یک نقطه‌ی متحرک در مرکز جرم آن، G_i ، در نظر گرفت و فرض نمود که جرم لینک در آن نقطه متمرکز شده است.

در این حالت چون لینک‌ها فقط یک نقطه‌ی متحرک در مرکز جرم در نظر گرفته شده‌اند، انرژی جنبشی آن‌ها فقط شامل انرژی حاصل از حرکت انتقالی مرکز جرم است.

برای بدست آوردن انرژی پتانسیل و جنبشی لینک i ام ربات، باید موقعیت و سرعت مرکز جرم آن تعریف شود.

$$\overrightarrow{B_i G_i} = \frac{1}{M} \left[\left(m_1 \frac{l_1}{2} - m_2 \frac{l_2}{2} \right) + m_2 L_i \right] \vec{u}_i \quad (15)$$

که در آن $M = m_1 + m_2$ و \vec{u}_i بردار یکه در راستای لینک i ام است.

اگر نقطه‌ی O محل اتصال دستگاه مختصات پایین در پایه‌ی ثابت باشد، با توجه به شکل ۱، سرعت مرکز جرم لینک i ام به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\vec{V}_{G_i} = \frac{d\overrightarrow{OG_i}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{B_i G_i}}{dt} \quad (16)$$

یعنی،

$$\vec{V}_{G_i} = \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{l_1}{2} - m_2 \frac{l_2}{2} \right) \frac{d\vec{u}_i}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{d\vec{L}_i}{dt} \quad (17)$$

از طرفی با توجه به شکل ۱،

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OT_j}}{dt} \quad (18)$$

پس،

$$\vec{V}_{G_i} = \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{l_1}{2} - m_2 \frac{l_2}{2} \right) \frac{d\vec{u}_i}{dt} + \frac{m_2}{M} \frac{d\overrightarrow{OT_j}}{dt} \quad (19)$$

برای بدست آوردن بردار یکه‌ی \vec{u}_i می‌توان با توجه به شکل ۱ و استفاده از زنجیره‌ی سینماتیکی حلقه بسته‌ی هر لینک، بردار طول آن را به طور جداگانه بدست آورد، و آن را به اندازه‌ی طول هر لینک که حاصل از سینماتیک معکوس ربات است تقسیم کرد.

$$\overrightarrow{B_i T_j} = L_i^{Base} \vec{u}_i = \frac{Base}{Top} R \vec{T}_j + \vec{P} - \vec{B}_i \quad (20)$$

(for $i = 1, 2, \dots, 6$ and $j = 1, 2, 3$)

که در این رابطه، \vec{P} برداری است که مرکز دو دستگاه مختصات واقع در صفحه‌ی متحرک و پایه‌ی ثابت را به هم متصل می‌کند. بردار مختصات رأس‌های صفحه‌ی متحرک در دستگاه مختصات بالایی است و \vec{B}_i بردار مختصات رأس‌های پایه‌ی ثابت می‌باشد.

در نتیجه بردار یکه برابر است با،

$$Base \vec{u}_i = \frac{\frac{Base}{Top} R \vec{T}_j + \vec{P} - \vec{B}_i}{L_i} = [u_{i,x}, u_{i,y}, u_{i,z}]^T \quad (21)$$

با توجه به تعریف فوق،

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \frac{d \left(\frac{\overrightarrow{B_i T_j}}{L_i} \right)}{dt} = -\frac{1}{L_i} \frac{dL_i}{dt} \vec{u}_i + \frac{1}{L_i} \vec{V}_{T_j} \quad (22)$$

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\frac{1}{L_i} (\vec{V}_{T_j} \cdot \vec{u}_i) \vec{u}_i + \frac{1}{L_i} \vec{V}_{T_j} \quad (23)$$

که با جایگذاری آن در رابطه‌ی (۱۹)،

$$\vec{V}_{G_i} = \frac{1}{ML_i} \left(m_1 \frac{l_1}{2} - m_2 \frac{l_2}{2} \right) [\vec{V}_{T_j} - (\vec{V}_{T_j} \cdot \vec{u}_i) \vec{u}_i] + \frac{m_2}{M} \vec{V}_{T_j} \quad (24)$$

در رابطه‌ی فوق تنها \vec{V}_{T_j} مجهول است. برای بدست آوردن آن با توجه به شکل ۱، نتیجه می‌شود.

$$\overrightarrow{OT_j} = \vec{P} + \vec{T}_j \quad (for \ j = 1, 2, 3) \quad (25)$$

با مشتق گرفتن از طرفین رابطه‌ی (۲۵) می‌توان سرعت مفاصل

کروی \vec{T}_j را محاسبه کرد.

$$\vec{V}_{T_j} = \vec{V}_P + \vec{\omega}_{platform} \times \vec{T}_j \quad (26)$$

در نهایت انرژی جنبشی هر لینک برابر است با،

$$K_{link_i} = \frac{1}{2} \vec{V}_{G_i}^T M \vec{V}_{G_i} \quad (27)$$

بنابراین برای تمام لینک‌ها می‌توان نوشت.

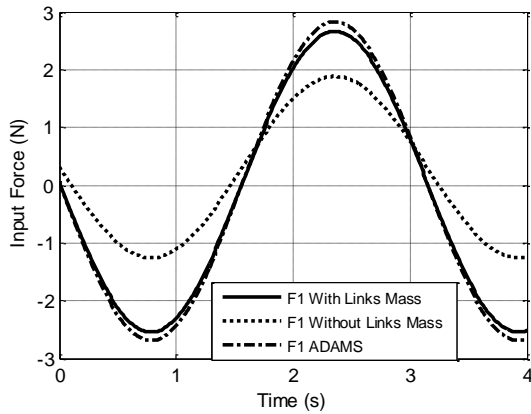
$$K_{links} = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{2} \vec{V}_{G_i}^T M \vec{V}_{G_i} \quad (28)$$

در نتیجه انرژی جنبشی کل ربات برابر است با،

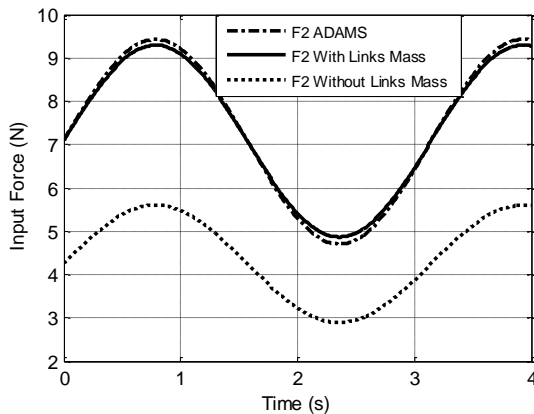
$$K = K_{links} + K_{Platform} \quad (29)$$

محاسبه‌ی انرژی پتانسیل لینک‌ها

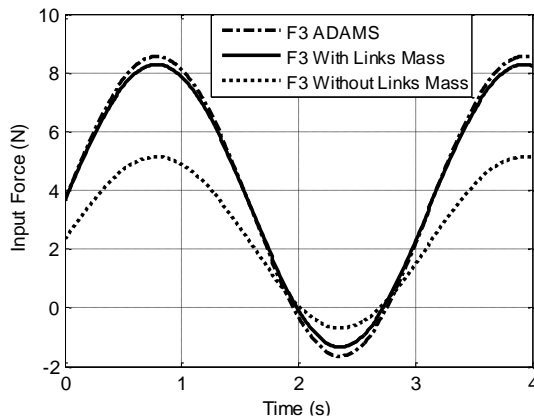
برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل لینک‌ها، ابتدا باید ارتفاع مرکز جرم، Z_{G_i} ، آن‌ها محاسبه شود.



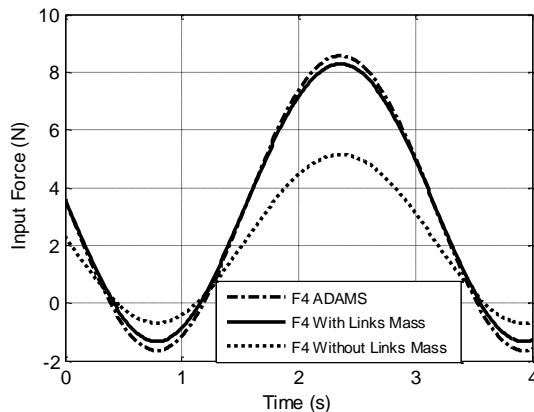
شکل ۷: نیروی مورد نیاز لینک ۱



شکل ۸: نیروی مورد نیاز لینک ۲



شکل ۹: نیروی مورد نیاز لینک ۳



شکل ۱۰: نیروی مورد نیاز لینک ۴

از آنجا که هر لینک توسط یک مفصل یونیورسال به پایه‌ی ثابت متصل شده است، می‌توان جهت آن را با داشتن دو زاویه‌ی اوپلر توصیف نمود. با دو چرخش به اندازه‌های θ_x و θ_z از دستگاه ثابت به دستگاه متصل به لینک خواهیم رسید. بنابراین می‌توان ماتریس دوران را به صورت زیر بیان کرد.

$${}^{Base}_i R = \begin{bmatrix} C\theta_z & -S\theta_z C\theta_x & S\theta_z S\theta_x \\ S\theta_z & C\theta_z C\theta_x & -C\theta_z S\theta_x \\ 0 & S\theta_x & C\theta_x \end{bmatrix} \quad (30)$$

دستگاه مختصات i ، دستگاه متصل به لینک i ام است.

پس،

$${}^{Base}\vec{u}_i = {}^{Base}_i R \vec{u}_i = [-S\theta_z C\theta_x, C\theta_z C\theta_x, S\theta_x]^T \quad (31)$$

بنابراین،

$$S\theta_x = u_{i,z}, C\theta_x = \sqrt{u_{i,x}^2 + u_{i,y}^2}, S\theta_z = \frac{-u_{i,x}}{C\theta_x}, C\theta_z = \frac{u_{i,y}}{C\theta_x} \quad (32)$$

با توجه به شکل ۵ موقعیت مرکز جرم لینک‌ها در راستای لینک در مختصات پایه‌ی ثابت به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\vec{y}_{G_i}^{Base} \vec{u}_i = \frac{m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left(L_i - \frac{l_2}{2} \right)}{m_1 + m_2} {}^{Base}\vec{u}_i \quad (33)$$

پس،

$$Z_{G_i} = \frac{m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left(L_i - \frac{l_2}{2} \right)}{M} S\theta_x \quad (34)$$

اکنون می‌توان انرژی پتانسیل هر لینک را به صورت زیر بیان نمود.

$$P_{Link_i} = M g Z_{G_i} = g \left(m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left(L_i - \frac{l_2}{2} \right) \right) S\theta_{x_i} \quad (35)$$

و برای مجموعه‌ی لینک‌ها خواهیم داشت.

$$P_{links} = \sum_{i=1}^6 g \left(m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left(L_i - \frac{l_2}{2} \right) \right) S\theta_{x_i} \quad (36)$$

پس برای کل ربات می‌توان نوشت.

$$P = P_{links} + P_{Platform} \quad (37)$$

حال برای ابعاد و اندازه‌های فیزیکی افزوده شده‌ی حاصل از فرض در نظر گرفتن جرم لینک‌ها به صورت جرم متمرکز، که در زیر آورده شده‌اند، نیروهای لازم جهت دنبال کردن مسیر q محاسبه می‌شود.

$$m_1 = 0.4279 \text{ (kg)}, m_2 = 0.1228 \text{ (kg)}$$

$$l_1 = 0.22 \text{ (m)}, l_2 = 0.05 \text{ (m)}$$

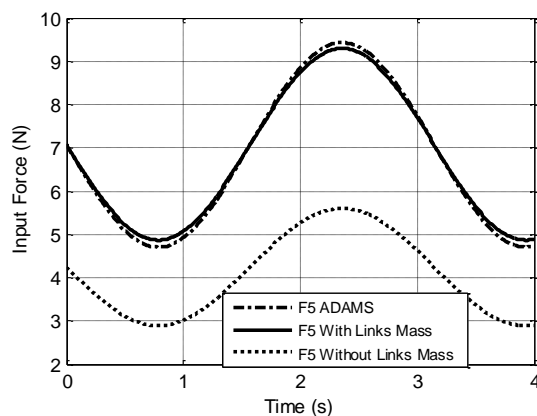
در ادامه، نتایج در سه حالت، ۱- حل تحلیلی بدون در نظر گرفتن جرم لینک‌ها، ۲- حل تحلیلی با در نظر گرفتن جرم لینک‌ها به صورت جرم متمرکز در مرکز جرم آن‌ها و ۳- تحلیل کامل نرم‌افزار آدامز، با یکدیگر مقایسه می‌شوند. منظور از تحلیل کامل در نرم‌افزار آدامز، در نظر گرفتن لینک‌ها به صورت دو قسمت ثابت و متحرک با دو اینرسی منحصر بفرود می‌باشد. نیروهای مورد نیاز هر لینک جهت دنبال کردن مسیر q در هر یک از سه حالت فوق در شکل‌های ۶ تا ۱۱ نشان داده شده‌اند.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

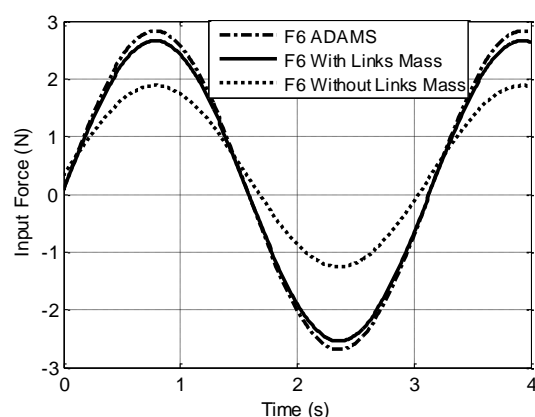
در این مقاله، دینامیک معکوس ربات گوف - استوارت با استفاده از روش لاگرانژ با فرض در نظر گرفتن جرم لینک‌ها به صورت جرم متمرکز در مرکز جرم آن‌ها بررسی شده است. جدول ۱ بیانگر این است تحلیل دینامیک ربات با صرف نظر کردن از جرم لینک‌ها، که در [۹] انجام شده است، خطای زیادی در نتایج نهایی اعمال می‌کند. اما روش ارائه شده در این پژوهش، معیار انتگرال مربعات خطا را کاهش می‌دهد. همچنین این روش بار محاسباتی را نسبت به حل تحلیلی کامل دینامیک معکوس ربات، یعنی در نظر گرفتن لینک‌ها به صورت ترکیبی از دو قسمت ثابت و متحرک به عنوان دو جسم با دو اینرسی منحصر بفرد، به طور چشم‌گیری کاهش می‌دهد. این دستاورد بهبود کیفیت را در الگوریتم‌های کنترلی مبتنی بر مدل و کنترل‌هایی که مبتنی بر پیش‌بینی مدل می‌باشند در پی دارد.

مراجع

- [1] Stewart, D., 1965. "A Platform with Six Degrees of Freedom". *institution of mechanical engineers*, Vol 180, pp. 371-386.
- [2] Liu, K., Fitzgerald, J. M., and Lewis, F. L., 1993. "Kinematic analysis of a Stewart platform manipulator". *Industrial Electronics, IEEE Transactions*, 40(2), pp. 282-293.
- [3] Guglielmetti, P., Longchamp, R., 1994. "A Closed Form Inverse Dynamics Model of the Delta Parallel Robot". *International Federation of Automatic Control Conference on Robot Control*, pp. 39-44.
- [4] Dasgupta, B., Mruthyunjaya, T. S., 1998. "A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator". *Mechanism and Machine Theory*, 33(8), pp. 1135-1152.
- [5] Etemadi Zanganeh, K., Sinatra, R., and Angeles, J., 1997, "Kinematics and Dynamics of a Six-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator with Revolute Legs". *Robotica*, 15, pp. 385-394.
- [6] Staicu, S., 2011, "Dynamics of the 6-6 Stewart parallel manipulator". *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 27, no. 1, pp. 212-220.
- [7] Lebret, G., Liu, K., and Lewis, F. L., 1993. "Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Manipulator". *J. Robotic Systems*, 10, No. 5, pp. 629-655.
- [8] Miller, K., Clavel, R., 1992. "The Lagrange-Based Model of Delta-4 Robot Dynamics". *Robotersysteme, Springer-Verlag*, 8, pp. 49-54.
- [9] Hajimirzaalian, H., Moosavi, H., and Massah, M., 2010. "Dynamics Analysis and Simulation of Parallel Robot Stewart Platform". *In Computer and Automation Engineering (ICCAE), 2010 The 2nd International Conference*, Vol. 5, pp. 472-477.
- [10] Serban Agachi, P., 2006. *Model Based Control: Case Studies in Process Engineering*. Wiley-VCH.
- [11] Rossiter, J.A., 2003. *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach (Control Series)*. CRC Press.



شکل ۱۱: نیروی مورد نیاز لینک ۵



شکل ۱۲: نیروی مورد نیاز لینک ۶

در نهایت، برای مقایسه کمی نتایج، به بررسی مقدار خطا پرداخته شده است. معیارهای مختلفی برای بررسی خطا نظیر $ITAE$ ، $ITSE$ ، IAE و ISE پیشنهاد شده است. در این مقاله از معیار انتگرال مربعات خطا (ISE) استفاده می‌شود.

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (38)$$

زیرا با توجه به رابطه‌ی (۳۸)، در این معیار مقادیر منفی خطا اثرات مقادیر مثبت خطا را خنثی نمی‌کنند. در پژوهش حاضر نیز هر دو نوع مقادیر مثبت و منفی خطا وجود دارند.

معیار انتگرال مربعات خطا نسبت به نتایج حاصل از تحلیل کامل نرم‌افزار آدامز برای هر لینک در دو حالت، (الف) - بدون در نظر گرفتن جرم لینک‌ها و (ب) - با در نظر گرفتن جرم لینک‌ها با فرض متمرکز بودن جرم لینک‌ها در مرکز جرم آن‌ها، محاسبه شده و در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: معیار انتگرال مربعات خطا در هر لینک

لینک	۱	۲	۳	۴	۵	۶
(الف)	۳/۴۵۲۲	۲۷/۲۷۲۷	۱۹/۲۵۹۷	۱۲/۹۸۷۹	۳۰/۶۳۳۳	۲/۷۸۱۰
(ب)	۰/۰۴۸۷	۰/۰۴۳۳	۰/۱۷۳۵	۰/۱۸۰۵	۰/۰۴۶۱	۰/۰۵۱۸

- ^۱ Integral square error
- ^۲ Integral time square error
- ^۳ Integral absolute error
- ^۴ Integral time absolute error