انجمن آمار ایران
IRANIAN STATISTICAL SOCIETY 1990

دانشگاه بین المللی امام خمینی
IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

for all $A \subset S$
$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

$P(S) = 1$

$A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$
$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

یازدهمین
سمینار احتمال و فرایندهای تصادفی

11th
Seminar on Probability and Stochastic Processes

۸ و ۹ شهریور ۱۳۹۶

30-31 August 2017

آدرس دبیرخانه:
قزوین، دانشگاه بین المللی امام خمینی، دانشکده علوم پایه
تلفن و دورنویس دبیرخانه ۳۳۹۰۱۳۷۹-۰۲۸

ادرس صفحه وب سمینار:
https://spsp11.conf.ikiu.ac.ir
ایمیل سمینار:
spsp11@conf.ikiu.ac.ir

11

مقایسه شاخص کارایی C_{pmk} دو فرایند با استفاده از فاصله اطمینان تعمیم‌یافته

محیا قاسمی، زهره پروانه، مهدی جباری نوقابی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده: شاخص‌های کارایی فرایند برای اندازه‌گیری کارایی فرایند استفاده می‌شوند. در حالت‌هایی مثل انتخاب تامین‌کننده‌ی بهتر و ارزیابی پیشرفت فرایند، مقایسه‌ی شاخص‌های کارایی دو فرایند متفاوت می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. در این مقاله با استفاده از فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت شاخص کارایی C_{pmk} دو فرایند متفاوت و انجام آزمون فرضیه‌ی مناسب با ارایه یک مثال، این مقایسه انجام گرفته است. شاخص کارایی C_{pmk} بر اساس این فرض است که فرایند مورد نظر دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: شاخص‌های کارایی فرایند، فاصله اطمینان تعمیم‌یافته.

۱ مقدمه

هر کارخانه‌ای محصولاتش را با این هدف که آن‌ها را به مشتریان زیادی به فروش می‌رساند و به سود بیش‌تری دست می‌یابد، تولید می‌کند. مصرف‌کنندگان تنها محصولاتی را که با انتظاراتشان مطابقت دارد تقاضا می‌کنند. بنابراین، فرایند تولید باید قابلیت تولید محصولی با کیفیت مورد انتظار را داشته باشد. هنگامی که فرایند تولید تحت کنترل آماری است، شاخص‌های کارایی فرایند برای اندازه گیری کارایی فرایند به کار برده می‌شوند. بیشترین ارزیابی در مورد شاخص‌های کارایی فرایند تنها روی براورد نقطه ای آنها متمرکز است و بنابراین این امکان وجود دارد که اظهار نظرهای غیر قابل اعتمادی درباره ی کارایی فرایند صورت پذیرد. به عبارت دیگر استفاده از شاخص‌های کارایی فرایند بخش مهمی از کاربردهای

کنترل فرایندهای آماری برای دستیابی به پیشرفت های مستمر در کیفیت به شمار می‌رود. شاخص‌های کارایی فرایند مانند C_p، C_{pk}، C_{pm} و C_{pmk} برای فراهم آوردن یک اندازه‌ی کمی از عملکرد ساخت در صنایع و یا اندازه‌گیری کارایی یک محصول به کار برده می‌شوند. بسیاری از آماردان‌ها و مهندسین کیفیت بر پژوهش روی شاخص‌های کارایی فرایند به منظور پیشنهاد روش‌های مؤثرتری در مورد سنجش کارایی فرایند تأکید می‌کنند. شاخص کارایی یک اندازه بر اساس پارامترهای فرایند و حدود مشخصات فنی است.

شاخص‌های شناخته شده ی C_p، C_{pk}، C_{pm} و C_{pmk} بر اساس این فرض هستند که فرایند مورد نظر دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. اگر U و L به ترتیب نشان دهنده ی حد مشخصه فنی بالا و پایین و T مقدار هدف باشد، این شاخص‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
C_p &= \frac{U-L}{6\sigma},\\
C_{pk} &= \min\left(\frac{U-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-L}{3\sigma}\right),\\
C_{pm} &= \frac{U-L}{6\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}
\end{aligned}
$$

و

$$
C_{pmk} = \frac{\min(USL-\mu, \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}.
$$

در این مقاله فرض شده است حدود مشخصات فنی (L, U) و مقدار هدف T برای دو فرایند یکسان است.

یک فاصله اطمینان دقیق برای C_p با استفاده از توزیع کی دو به دست می آید. برای مقایسه‌ی دو شاخص C_{pmk} ساختارهای فاصله اطمینان دقیق نیستند و فواصل اطمینان فقط بر حسب روش های تقریبی حاصل می شود.

در ادامه فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pmk1}}{C_{pmk2}}$ محاسبه می‌شود و با استفاده از این فاصله اطمینان آزمون فرضیه مربوطه انجام می‌گیرد.

۲ مقایسه شاخص کارایی C_{pmk} دو فرایند

در این بخش، مقایسه شاخص کارایی C_{pmk} دو فرایند را با استفاده از روش فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته ارائه می‌دهیم. برای این مقایسه، علاقمند به انجام آزمون فرضیه $H_{\circ} : C_{pmk1} = C_{pmk2}$ در برابر $H_1 : C_{pmk1} \neq C_{pmk2}$ هستیم.

۱.۲ فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته

یک جامعه با تابع توزیع تجمعی $F(x|\zeta)$ را در نظر بگیرید که X بردار متغیر تصادفی و $\zeta = (\theta, \delta)$ بردار پارامترهای مجهول است. θ پارامتر مورد علاقه (پارامتری که برای آن فاصله اطمینان به دست آورده می شود) و δ پارامتر مزاحم است. علاقمند به یافتن برآورد فاصله‌ای برای θ بر اساس مقادیر مشاهده شده X هستیم. برای مثال، در توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2، پیدا کردن کمیت محوری برای توابع خطی از μ یا σ مشکل نیست، اما کمیت محوری برای تابعی مثل $\sigma^2 + \mu^2$ وجود ندارد. بنابراین، باید تعریف کمیت محوری متعارف را توسعه داد تا بتوان برآورد فاصله‌ای را به شکل کاربردی مورد استفاده قرار داد.

تعریف ۱.۲. *فرض کنید $R = r(X; x, \zeta)$ تابعی از X و ζ است و می‌تواند تابعی از مقدار مشاهده شده x نیز باشد. اگر کمیت تصادفی R در دو شرط زیر صدق کند، آن گاه R یک کمیت محوری تعمیم‌یافته است:*

۱. *توزیع R به پارامترهای مجهول بستگی نداشته باشد.*

۲. *کمیت مشاهده شده $r = r(x; x, \zeta)$ به پارامتر مزاحم δ وابسته نباشد.*

ایده فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته اولین بار توسط ویراهاندی[۱] مطرح شد. وقتی که کمیت محوری متعارف وجود نداشته باشد یا به دست آوردن آن مشکل باشد، روش فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته ارزش بیش‌تری خواهد داشت.

قضیه‌ی ۲.۲. *اگر فرایند ۱ با حجم نمونه n_1 و فرایند ۲ با حجم نمونه n_2 به ترتیب دارای توزیع نرمال با میانگین μ_1 و μ_2 و انحراف معیار σ_1 و σ_2 باشد و R_{μ_i} و R_{σ_i} به ترتیب کمیت‌های محوری*

[۱] Weerahandi

تعمیم‌یافته برای μ_i و $\sigma_i^۲$ باشند و به صورت زیر تعریف شوند:

$$R_{\mu_i} = \bar{x}_i - \frac{Z_i s_i}{\sqrt{U_i}}\sqrt{\frac{n_i - ۱}{n_i}}, \qquad i = ۱, ۲$$
$$R_{\sigma_i^۲} = \frac{(n_i - ۱)s_i^۲}{U_i}, \qquad i = ۱, ۲$$

که درآن $Z_i = \frac{\overline{X}_i - \mu_i}{\sigma_i/\sqrt{n}} \sim N(۰, ۱)$ ، $U_i = \frac{(n_i-۱)S_i^۲}{\sigma_i^۲} \sim \chi^۲_{n_i-۱}$ و $M = \frac{L+U}{۲}$ می‌باشد، آن‌گاه کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pmk۱}}{C_{pmk۲}}$ به صورت ۱ است:

$$R_{C_{pmk}} = \frac{R_{C_{pmk۱}}}{R_{C_{pmk۲}}}, \tag{۱}$$

که درآن $R_{C_{pmki}}$ کمیت محوری تعمیم یافته برای C_{pmki} است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{C_{pmki}} = \frac{(U-L) - |R_{\mu_i} - M|}{۳\sqrt{R_{\sigma_i^۲} + (R_{\mu_i} - T)^۲}}, \qquad i = ۱, ۲.$$

برهان. توزیع R_{μ_i} و همچنین توزیع $R_{\sigma_i^۲}$ به $(\mu_i, \sigma_i^۲)$ بستگی ندارند، بنابراین توزیع $R_{C_{pmki}}$ نیز به $(\mu_i, \sigma_i^۲)$ بستگی ندارد. از طرفی $r_{C_{pmki}} = C_{pmki}$ است، پس $R_{C_{pmki}}$ یک کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای C_{pmki} است. بنابراین یک کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pmk۱}}{C_{pmk۲}}$ به صورت زیر است:

$$R_{C_{pmk}} = \frac{R_{C_{pmk۱}}}{R_{C_{pmk۲}}}. \tag{۲}$$

واضح است که $r_{C_{pmk}} = \frac{C_{pmk۱}}{C_{pmk۲}}$ است و همچنین توزیع $R_{C_{pmk}}$ به پارامترهای مجهول بستگی ندارد، بنابراین $R_{C_{pmk}}$ یک کمیت‌محوری تعمیم‌یافته برای $\frac{C_{pmk۱}}{C_{pmk۲}}$ است. □

با توجه به قضیه ۲.۲ یک فاصله‌اطمینان تقریبی $(۱ - \alpha)۱۰۰\%$ برای $\frac{C_{pmk۱}}{C_{pmk۲}}$ عبارت است از:

$$\left[R_{C_{pmk:\frac{\alpha}{۲}}}, R_{C_{pmk:۱-\frac{\alpha}{۲}}}\right], \tag{۳}$$

که در آن $R_{C_{pmk:\frac{\alpha}{۲}}}$ چندک $\frac{\alpha}{۲}$ و $R_{C_{pmk:۱-\frac{\alpha}{۲}}}$ چندک $۱ - \frac{\alpha}{۲}$ توزیع $R_{C_{pm}}$ است. چون در این‌جا نمی‌توان توزیع $R_{C_{pmk}}$ را به شکل بسته نوشت، بنابراین با استفاده از شبیه‌سازی چندک‌ها را محاسبه می‌کنیم. اگر $R_{C_{pmk:\frac{\alpha}{۲}}} > ۱$ یا $R_{C_{pmk:۱-\frac{\alpha}{۲}}} < ۱$ باشد، کارایی دو فرایند متفاوت است.

مثال ۳.۲. *داده‌های جدول ۱ که از مرجع چن وتانگ (۲۰۰۳) گرفته شده است، مربوط به دو تأمین‌کننده است که فویل آلومینیوم را برای یک شرکت الکترونیکی در تایوان آماده می‌کنند. فویل آلومینیوم به عنوان*

مؤلفه کلیدی، کیفیت باطری‌ها را تعیین می‌کند و ولتاژ نیز یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های کیفی فویل آلومینیوم است. مشخصه‌های تولید ولتاژ (LSL, T, USL)، به صورت (۵۱۰ , ۵۲۰ , ۵۳۰) است. اگر ولتاژ خارج از فاصله (۵۱۰ , ۵۳۰) باشد، فویل آلومینیوم شکسته خواهد شد و بنابراین پذیرفته نمی‌شود. پنجاه نمونه تصادفی از تأمین‌کننده‌های ۱ و ۲ توسط بازرس کنترل کیفیت گرفته شده است. فرایند هر تأمین کننده تقریباً نرمال و تحت کنترل آماری است.

جدول ۱: داده‌های ولتاژ دو تأمین‌کننده برای فویل آلومینیوم. واحد اندازه‌گیری: WV^*.

تأمین‌کننده ۱					تأمین‌کننده ۲				
۵۱۹/۹	۵۱۹/۵	۵۲۰/۱	۵۱۷/۰	۵۲۱/۱	۵۲۱/۷	۵۲۱/۳	۵۲۳/۵	۵۲۴/۴	۵۲۲/۵
۵۱۷/۱	۵۱۸/۷	۵۲۰/۱	۵۲۱/۲	۵۲۱/۷	۵۲۳/۳	۵۲۷/۱	۵۲۴/۹	۵۲۲/۹	۵۲۴/۲
۵۲۰/۴	۵۱۷/۹	۵۲۲/۹	۵۱۷/۷	۵۱۷/۲	۵۲۳/۹	۵۲۳/۵	۵۲۷/۵	۵۱۷/۳	۵۱۸/۷
۵۲۰/۷	۵۲۱/۰	۵۱۹/۱	۵۱۸/۴	۵۱۸/۹	۵۱۸/۷	۵۲۱/۹	۵۱۹/۷	۵۲۰/۴	۵۲۰/۴
۵۱۷/۹	۵۱۸/۴	۵۲۰/۸	۵۱۹/۳	۵۲۰/۶	۵۲۳/۷	۵۲۶/۸	۵۱۷/۷	۵۲۸/۱	۵۱۷/۵
۵۱۶/۶	۵۱۹/۰	۵۲۰/۶	۵۱۷/۹	۵۱۹/۶	۵۲۳/۸	۵۱۴/۷	۵۲۲/۶	۵۱۸/۵	۵۲۶/۳
۵۱۹/۶	۵۲۲/۶	۵۱۸/۳	۵۲۲/۱	۵۲۳/۱	۵۲۳/۲	۵۲۴/۴	۵۲۲/۷	۵۱۹/۶	۵۲۰/۴
۵۱۹/۹	۵۱۹/۸	۵۲۰/۷	۵۱۶/۵	۵۲۱/۵	۵۲۰/۶	۵۲۵/۲	۵۲۴/۱	۵۱۹/۳	۵۲۲/۲
۵۱۹/۲	۵۲۱/۲	۵۱۸/۹	۵۱۷/۸	۵۲۱/۳	۵۲۰/۱	۵۲۱/۹	۵۱۶/۷	۵۲۰/۹	۵۲۵/۲
۵۲۱/۳	۵۱۷/۴	۵۱۹/۵	۵۲۲/۰	۵۲۳/۸	۵۲۲/۶	۵۲۳/۱	۵۲۱/۷	۵۲۰/۹	۵۲۶/۳

*حداکثر مقدار ولتاژ خازن را ولتاژ کار خازن یا Working Voltege می‌نامند.

فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته $(\alpha-1)$ ۱۰۰% برای نسبت C_{pmk} دو فرایند عبارت است از (۱/۵۲۲, ۲/۵۹۱) که نشان می‌دهد فرایند ۱ کاراتر از فرایند ۲ است. فاصله اطمینان برای نسبت C_{pmk} دو فرایند نیز به صورت (۱/۷۴۱, ۳/۳۸۷) به دست می‌آید که بیانگر کاراتر بودن فرایند ۱ نسبت به فرایند ۲ است.

بحث و نتیجه‌گیری

کمیت‌محوری تعمیم‌یافته و فاصله‌اطمینان تعمیم‌یافته ابزار بسیار مفیدی برای استنباط در مورد مسایل آمار صنعتی می‌باشند. شاخص‌های کارایی فرایند کمیت‌های با اهمیتی هستند که برای تعیین کارایی فرایند محصولات تولیدی استفاده می‌شوند. فاصله اطمینان ارائه شده در این مقاله می‌تواند برای مقایسه شاخص کارایی چندین فرایند و یا مقایسه‌های زوجی تعمیم داده شود.

مراجع

[1] Chen, J. P. and Tong, L. I., (2003), Bootstrap confidence interval of the difference between two process capability indices, *Int J Adv Manuf Technol*, **21**:249-256.

[2] Kanichukattu, J. K. and Luke, J. A., (2013), Comparison between two process capability indices using generalized confidence intervals, *Int J Adv Manuf Technol*.

[3] Kotz, S. and Johnson, N. L., (1993), *Process capability indices*. Chapman and Hall, London.

[4] Kotz, S. and Lovelace, C. R., (1988), *Process Capability Indices in Theory and Practice*, Arnold, London.

[5] Montgomery, D. C., (2005), *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley, New York, 6th ed.

[6] Pearn, W. L. and Kotz, S., (2006), *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices*, World Scientific, Vol. 12.

[7] Weerahandi, S., (1995), *Exact statistical methods for data analysis*, Springer, New York.