



## مدلسازی و تحلیل دال بتن آرمه ی دوطرفه و انتخاب پارامترهای خسارت مومسانی بتن در نرم افزار اجزای محدود ABAQUS

ابوالفضل نخعی<sup>۱</sup>، محمدرضا توکلی زاده<sup>۲\*</sup>، حمید شیرازی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد سازه دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup>استادیار گروه مهندسی عمران دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۳</sup>استادیار گروه مهندسی عمران دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

\*نویسنده مسئول: [drt@um.ac.ir](mailto:drt@um.ac.ir)

### خلاصه

امروزه استفاده از نرم افزارهای تحلیل اجزای محدود با توجه به مسائلی همچون محدود بودن امکانات آزمایشگاهی و شرایط بارگذاری، صرفه جویی در زمان و هزینه و امکان ساخت نمونه های بیشتر، کاربرد گسترده ای در مهندسی پیدا کرده است. از جمله نرم افزارهای رایج برای تحلیل سازه ها به روش اجزای محدود نرم افزار ABAQUS است. این نرم افزار قابلیت مدلسازی مواد با ویژگی های مختلف را در اختیار کاربر قرار می دهد. با توجه به پیچیدگی مدلسازی بتن در این نرم افزار و وجود روابط گوناگون در فقدان داده های آزمایشگاهی برای نمودار تنش- کرنش بتن، این پژوهش با مدلسازی یک دال بتن آرمه ی دوطرفه در این نرم افزار و استفاده از فرضیات گوناگون در شبیه سازی رفتار بتن به یافتن مقادیر مناسب برای پارامترهای خسارت مومسانی بتن و همچنین انتخاب بهترین رابطه برای ایجاد نمودار تنش- کرنش بتن می پردازد. استفاده از روند توصیه شده در این پژوهش منجر به نزدیکی نتایج تحلیل اجزای محدود و داده های آزمایشگاهی شده است.

**کلمات کلیدی:** اجزای محدود، تنش- کرنش بتن، مکانیک شکست بتن، مدل خسارت مومسانی بتن، دال بتن آرمه ی دوطرفه، ABAQUS

### ۱. مقدمه

بتن یکی از پیچیده ترین مصالح برای مدلسازی در نرم افزارهای اجزای محدود است. شناساندن رفتار بتن در فشار و کشش به نرم افزار در حالت ارتجاعی و خمیری تاثیر بسزایی در نتایج تحلیل دارد؛ به نحوی که چنانچه پژوهشگر در مرحله مدلسازی به جزئیات رفتار بتن توجه نکند احتمال بروز خطا در نتایج حاصل از نرم افزار وجود دارد. از جمله نرم افزارهای مورد استفاده برای تحلیل اجزای محدود ABAQUS است که در زمینه مدلسازی مصالح گوناگون مانند بتن، کامپوزیت، مواد بارفتار پلاستیک کامل (فولاد) و غیره پیش فرض های مناسبی را در اختیار پژوهشگر قرار می دهد [۱]. برای تعریف رفتار غیرخطی بتن می توان از یکی از سه مدل رفتاری مصالح موجود در نرم افزار ABAQUS استفاده نمود:

۱- بتن ترک اندود (Concrete Smeared Cracking): در این مدل فرض می شود مهمترین جنبه رفتاری بتن ترک خوردگی است، ترک خوردگی زمانی رخ می دهد که تنش ها به یک سطح شکست برسند که سطح آشکاری ترک نامیده



می شود. در این روش ترکها غیر قابل بازگشت بوده و در ادامه محاسبات حضور دارند، اما ممکن است باز و بسته شوند. این مدل رفتاری در شبیه سازی رفتار چرخه ای بتن ضعف دارد، همچنین این مدل رفتاری تنها در حلگر ضمنی (ABAQUS Standard) قابل استفاده است که با توجه به ترد و غیرخطی بودن بتن نقص عمده ای به شمار می رود.

۲- ترک ترد (Brittle Cracking): این مدل رفتاری تنها در حلگر صریح (ABAQUS Explicit) قابل استفاده است، با این وجود در شبیه سازی رفتار چرخه ای بتن ضعف دارد. از دیگر نواقص این مدل عدم در نظر گرفتن خرابی فشاری یا خردشدگی در مصالح است، با توجه به این موضوع استفاده از این مدل رفتاری برای مصالحی مانند سنگ که احتمال خرابی فشاری در آن کمتر است قابل استفاده می باشد. همچنین این مدل برای مسائلی که ترک خوردگی کششی رفتار حاکم بر ماده است مناسب است (در این مدل رفتار فشاری همیشه الاستیک خطی فرض می شود).

۳- خسارت مومسانی بتن (Concrete Damaged plasticity): این مدل که پیچیده ترین و پرکاربردترین مدل برای رفتار بتن است قابلیت استفاده در هر دو حلگر صریح و ضمنی را دارا می باشد. در این مدل فرض بر این است که ترک کششی و خردشدگی فشاری دو جنبه اصلی مکانیزم گسیختگی بتن می باشد و برای مدل سازی شکست مصالح ترد تحت بارگذاری های چرخه ای طراحی شده است به طوری که امکان بازیابی سختی در بارگذاری های رفت و برگشتی وجود دارد. این مدل سه ویژگی اصلی بتن را در محاسبات لحاظ می کند:

۱- مقاومت فشاری بزرگتر از مقاومت کششی

۲- کاهش سختی با ورود به ناحیه غیر الاستیک

۳- امکان بازیابی سختی با تبدیل بارگذاری از کششی به فشاری.

لازم به ذکر است معیار خرابی این مدل Drucker Prager و تابع تسلیم Lubliner است [۱].

پژوهش های اندکی در رابطه با تاثیر پارامترهای مکانیک شکست بتن و تفسیر آنها در نرم افزارهای تحلیل اجزای محدود انجام شده است؛ از جمله آنها می توان به پژوهش کمیسیک و کمینسکی در سال ۲۰۱۱ اشاره کرد [2]. در این پژوهش محقق به تشریح پارامترهای مورد نیاز برای مدل خسارت مومسانی بتن در نرم افزار ABAQUS پرداخته است، نکته برجسته در این پژوهش توصیه نویسنده به انتخاب پارامتر ویسکوالاستیک به صورت کوچکترین عدد مثبت دارای تاثیر در روند حل است. در پژوهش دیگری که در سال ۱۳۹۲ توسط میرنقی موسوی و همکاران انجام شده است [۳] پژوهشگر پس از مدلسازی یک قاب بتن آرمه در نرم افزار ABAQUS استفاده از رابطه سو برای تنش- کرنش فشاری و رابطه رشید و نایل برای تنش- کرنش کششی را برای کاربرد در مدل خسارت مومسانی بتن توصیه کرده است. همچنین در این پژوهش تعریف جدیدی از پارامتر خرابی بتن برحسب نسبت کرنش غیر الاستیک به کرنش کلی بتن ارائه شده است. در سال ۱۳۹۳ ناهید عسکری زاده و محمدرضا محمدی زاده استفاده از رابطه هاگنستاد برای تنش- کرنش فشاری بتن را توصیه کرده اند [4]؛ همچنین نویسندگان برای رفتار کششی بتن پس از ترک خوردگی رفتار خطی قائل شده و کرنش نهایی بتن در کشش را ۱۰ برابر کرنش ترک خوردگی بتن فرض نموده اند. ساده سازی های انجام شده پس از تحلیل یک دیواربرشی در نرم افزار ABAQUS به نتایجی نزدیک به مدل آزمایشگاهی منجر شده است. در سال ۲۰۱۷ میلاد حافظ القرآنی پس از تحلیل اجزای محدود یک تیر پیش تنیده در نرم افزار ABAQUS استفاده از مدل کنت و پارک برای رفتار بتن در فشار و مدل خطی ساده سازی شده مشابه پژوهش پیشین را برای رفتار کششی بتن پیشنهاد داده است [5].

با توجه به پیشینه پژوهش نیاز به تشریح پارامترهای مکانیک شکست جهت مدلسازی بتن در نرم افزار ABAQUS و همچنین جزئیات محاسبه تنش و کرنش های مورد نیاز در نرم افزار بیشتر احساس می شود. در ادامه با توجه به برتری مدل رفتاری خسارت مومسانی بتن جزئیات مدلسازی و داده های ورودی برای این مدل رفتاری مورد بررسی قرار می گیرد.

## ۲. مشخصات مصالح و مدلسازی در نرم افزار

### ۱.۱.۲ بتن

#### ۱.۱.۲.۱. مشخصات مکانیک شکست بتن

مدل خسارت مومسانی بتن، توانایی در نظر گرفتن همزمان شکست ناشی از فشار و کشش در بتن را دارد. این مدل که نخستین مرتبه در سال ۱۹۸۹ برای تحلیل بتن و سایر مواد ترد تحت بارگذاری کلی (افزایشی، چرخه‌ای و دینامیکی) توسط لوبلینر ارائه شد، در سال ۱۹۹۸ توسط لی و فنوس تکمیل گردید. مدل مزبور بر گرفته از معیار شکست دراگر-پراگر بوده و دارای سطح شکست مخروطی شکل می‌باشد. برای تفسیر مدل خسارت مومسانی بتن در نرم‌افزار لازم است پارامترهایی به شرح زیر برای بتن انتخاب شود [۶]:

۱- زاویه اتساع (dilation angle): زاویه‌ی اتساع داخلی نسبت کرنش حجمی به کرنش برشی مصالح می‌باشد. با توجه به آزمایش‌ها مشخص شده است که برای بتن مسلح زاویه اتساع بین ۲۰ تا ۴۰ درجه خواهد بود. هرچه مقدار این زاویه کوچکتر باشد رفتار مصالح تردتر و هرچه مقدار این زاویه بزرگتر باشد ماده رفتار شکل پذیرتری از خود نشان می‌دهد [۱].

۲- خروج از مرکزیت (eccentricity): این پارامتر برابر نسبت مقاومت کششی به مقاومت فشاری بتن می‌باشد. مقدار پیش فرض برای این پارامتر برابر ۰,۱ است [۶].

۳-  $f_{bo}/f_{co}$ : این پارامتر بیانگر نسبت مقاومت فشاری دومحوره بتن به مقاومت فشاری تک محوره آن است. بر اساس نتایج آزمایشات مقدار پیش فرض برای این پارامتر برابر ۱,۱۶ است [۶].

۴-  $k$ : این پارامتر تعیین کننده‌ی شکل مقطع عرضی سطح تسلیم می‌باشد و بازه‌ی تغییرات آن ۰,۵ تا ۱ است. در صورت انتخاب  $k=1$  مقطع عرضی سطح تسلیم به شکل دایره خواهد شد [۶]. در این پژوهش بر اساس توصیه و پیش فرض نرم‌افزار مقدار  $k$  برابر ۰,۶۶۷ در نظر گرفته شده است.

۵- ویسکوزیته (viscosity parameter): به منظور پرهیز از واگرایی تحلیل که ممکن است در اثر ایجاد ترک یا خرد شدن بتن در مدل به وجود آید، ماده‌ی بتن در نرم‌افزار با استفاده از پارامتر ویسکوزیته به صورت یک ماده ویسکو پلاستیک در نظر گرفته می‌شود. انتخاب مقدار کم این پارامتر علاوه بر این که تاثیری در پاسخ سازه ندارد به همگرایی تحلیل کمک می‌کند [۶]. مقدار این پارامتر برابر ۰,۰۰۱ فرض شده است.

در این پژوهش مقاومت فشاری بتن برابر 31.89MPa و سایر مشخصات بتن برای مدل خسارت مومسانی به شرح جدول زیر در نظر گرفته شده است:

جدول ۱- مشخصات بتن مورد استفاده در تحلیل

density(kg/m <sup>3</sup> )	Young's modulus(MPa)	Poisson's ratio	dilation angle	eccentricity	$F_{bo}/F_{co}$	k	viscosity parameter
2400	25648	0.16	40	0.1	1.16	0.667	0.001

### ۲.۱.۲. نمودار تنش-کرنش فشاری بتن

پژوهشگران مختلف روابط گوناگونی را برای محاسبه‌ی تنش-کرنش فشاری بتن ارائه داده‌اند. تعدادی از این روابط در پیوست شماره‌ی یک قابل مشاهده است. لازم به توضیح است بسیاری از پژوهشگران و متون آیین‌نامه‌ای مقدار کرنش متناظر با مقاومت فشاری نمونه را برابر ۰,۰۰۲ و حد رفتار خطی بتن در فشار را تا ۰,۴ مقاومت فشاری پذیرفته‌اند. اگرچه

بسیاری از روابط پیشنهادی برای تنش-کرنش بتن از ابتدا رفتار بتن را غیرخطی در نظر می گیرند اما با تقریب خوبی می توان رفتار بتن در فشار را تا ۴۰ یا ۵۰ درصد مقاومت فشاری به صورت خطی و الاستیک فرض نمود. همچنین در بسیاری از آزمایش ها دیده شده بتن پس از خردشدگی فشاری ۲۰ درصد از مقاومت خود را حفظ می کند؛ به عبارت دیگر فرض صفر نشدن مقاومت بتن در فشار دور از واقعیت نیست [۱]. برای دست یابی به تنش ها و کرنش های غیر الاستیک بتن روند زیر باید طی شود:

داده های تنش و کرنش براساس روابط ارائه شده در پیوست شماره ی یک ایجاد می گردد. سپس محدوده داده ها از تنش متناظر با ۴۰ درصد مقاومت فشاری بتن به بعد انتخاب می شود. با توجه به روابط موجود برای محاسبه مدول الاستیسیته بتن مقدار این پارامتر محاسبه شده، در گام بعد به ازای هر تنش با تقسیم مقدار آن تنش بر مدول الاستیسیته مقدار کرنش الاستیک محاسبه می گردد. سپس به ازای هر داده، کرنش الاستیک از کرنش کل که از رابطه تنش-کرنش به دست آمده کم می شود و مقدار حاصل بیانگر کرنش غیرالاستیک بتن است [۱]، اکنون با توجه به فرض رفتار خطی بتن تا ۴۰ یا ۵۰ درصد مقاومت فشاری آن، مقدار اولین کرنش غیرالاستیک که عددی کوچک است صفر فرض می شود. مقادیر حاصل برای تنش و کرنش غیرالاستیک متناظر آن در Yield Stress و Inelastic Strain وارد می گردد.

$$\bar{\epsilon}_c^{in} = \epsilon_c - \epsilon_{0c}^{el} \quad (1)$$

$$\epsilon_{0c}^{el} = \frac{\sigma_c}{E_0} \quad (2)$$

$$E_0 = E = 4700\sqrt{f'_c} \quad (3)$$

در روابط فوق  $\bar{\epsilon}_c^{in}$  کرنش غیرالاستیک،  $\epsilon_c$  کرنش کلی بتن،  $\epsilon_{0c}^{el}$  کرنش الاستیک و  $E_0$  مدول الاستیسیته ی بتن است. خسارت فشاری بتن طبق تعاریف ارائه شده در راهنمای نرم افزار شیب بار برداری نمودار را کنترل می کند. در بتن و مصالح بنایی هرچه کرنش های غیر الاستیک بیشتر شود، شیب بازگشت منحنی به میزان بیشتری از شیب اولیه نمودار (مدول الاستیسیته) تنزل می کند که سبب آن آسیب دیدگی مصالح است. به عنوان پیشنهاد می توان از رابطه زیر برای محاسبه خسارت فشاری بتن استفاده نمود [۱]:

$$d_c = 1 - \frac{\sigma_c}{f'_c} \quad (4)$$

در این رابطه  $d_c$  پارامتر خرابی بتن در فشار است. مقدار تنش برابر با تنش هر نقطه از نمودار و مقدار تنش بیشینه برابر با مقاومت فشاری بتن است. لازم به توضیح است چنانچه از این رابطه برای تعیین خسارت بتن استفاده شود باید این پارامتر برای تنش های بزرگتر و برابر با مقاومت فشاری بتن به کار گرفته شود (برای ستون های خرابی فشاری متناظر با کرنش های غیر الاستیک در زبانه suboption تا قبل از مقاومت فشاری بتن مقدار صفر قرار میگیرد که بیانگر آسیب ندیدن بتن تا مقاومت فشاری است). همچنین برای تعیین خرابی بتن می توان از رابطه کوه استفاده نمود که در آن با داشتن کرنش پلاستیک  $\bar{\epsilon}_c^{pl}$ ، ضریب آلفا با استناد به نتایج آزمایشگاهی و قرارگیری رابطه در شرایط مرزی قابل محاسبه خواهد بود [7]:

$$d_c = 1 - \exp(-a_c \bar{\epsilon}_c^{pl}) \quad (5)$$

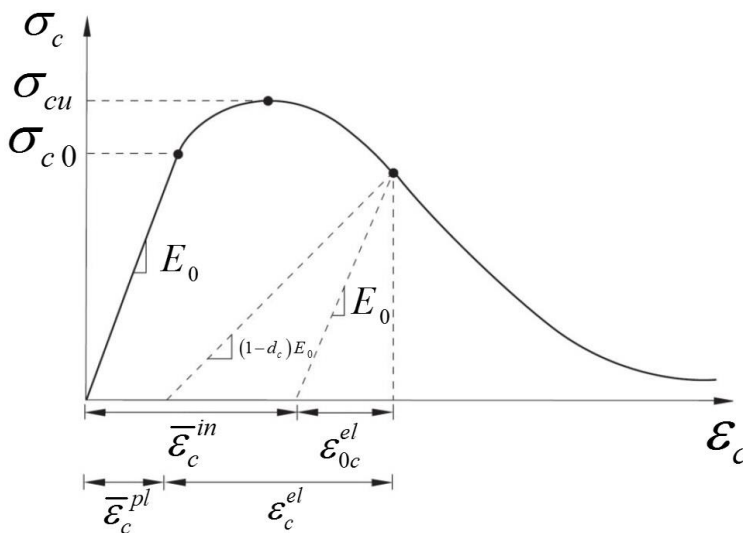
در صورت استفاده از این رابطه مقدار خسارت پلاستیک از تنش معادل ۴۰ درصد مقاومت فشاری ایجاد می گردد. پس از محاسبه مقدار پارامتر خرابی بتن مقادیر کرنش های غیر الاستیک و مقدار خرابی در زبانه suboption و Inelastic Strain و Damage Parameter وارد می شود (مقدار صفر برای پارامتر خرابی به معنای مصالح آسیب ندیده و مقدار ۱ به معنای مصالح کاملاً آسیب دیده است). لازم به ذکر است چنانچه مقادیر پارامتر خرابی منفی بوده یا روند نزولی داشته باشد نشان دهنده خطا در عملیات محاسباتی است و تحلیل نرم افزار شروع نخواهد شد [۱].



پس از محاسبه پارامتر خرابی نرم افزار طبق رابطه‌ی زیر که در راهنما ارائه شده اقدام به محاسبه کرنش‌های پلاستیک فشاری می‌نمایند ( $\bar{\epsilon}_c^{pl}$ )؛ در این مرحله چنانچه مقدار کرنش پلاستیک منفی شده یا روند نزولی داشته باشد نشانگر خطا در عملیات محاسباتی بوده و تحلیل در نرم افزار آغاز نمی‌گردد.

$$\bar{\epsilon}_c^{pl} = \bar{\epsilon}_c^{in} - \frac{d_c}{(1-d_c)} \frac{\sigma_c}{E_0} \quad (۶)$$

پارامتر دیگر در تعریف رفتار فشاری بتن بازیابی سختی برای تحمل کشش است. این متغیر در بارگذاری رفت و برگشتی موثر بوده و شیب رفتار مصالح را هنگامی که از بارگذاری فشاری به بارگذاری کششی وارد می‌شوند تعریف می‌کند؛ به عبارت دیگر بیانگر بازیابی سختی بتن در کشش پس از خرد شدن در فشار است و از آنجا که بتن خرد شده در فشار توانایی تحمل بارگذاری کششی را نخواهد داشت و مقدار این پارامتر برابر صفر در نظر گرفته می‌شود [۱].



شکل ۱- نمودار تنش-کرنش بتن، رفتار در فشار

### ۳.۱.۲. نمودار تنش-کرنش کششی بتن

روابط گوناگونی برای به دست آوردن نمودار تنش-کرنش بتن در کشش ارائه شده است. تعدادی از این روابط در پیوست شماره‌ی دو مشاهده می‌شود. تمامی این روابط با فرض رفتار خطی بتن در کشش تا رسیدن به تنش ترک خوردگی (تقریباً برابر با ۱۰ درصد از مقاومت فشاری بتن) ارائه شده‌اند. همچنین دو رفتار ساده سازی شده نیز در برخی مقالات برای بارگذاری کششی بتن توصیه شده است؛ در پیشنهاد نخست پس از رفتار خطی بتن تا رسیدن به تنش کششی بیشینه (تنش ترک خوردگی) رفتار بتن خطی فرض می‌گردد و به ازای کرنشی معادل ۱۰ برابر کرنش ترک خوردگی، مقاومت کششی، صفر در نظر گرفته می‌شود. پیشنهاد دوم کاملاً مشابه روش نخست بوده با این تفاوت که در کرنش معادل ۱۰ برابر کرنش ترک خوردگی، مقاومت کششی بتن برابر ۱۰ درصد از مقاومت کششی بیشینه فرض می‌شود. در رفتار کششی نیز با توجه به روابط ارائه شده در راهنمای نرم افزار روند زیر برای ایجاد داده‌های تنش-کرنش در نرم افزار متصور است [۱]:

مقادیر تنش و کرنش بر اساس روابط ارائه شده در پیوست شماره‌ی دو ایجاد می‌شود. محدوده داده‌های مورد نیاز از تنش کششی بیشینه (مقاومت کششی بتن) و کرنش نظیر آن انتخاب شده و با تقسیم هر مقدار تنش بر مدول الاستیسیته مقدار



کرنش الاستیک برای هر تنش حاصل می شود. در مرحله بعد مقدار کرنش الاستیک از تنش کلی ارائه شده توسط روابط، کاسته شده و مقدار کرنش غیر الاستیک به ازای هر تنش ایجاد می گردد. با توجه به خطی فرض شدن رفتار بتن تا رسیدن به مقاومت کششی، مقدار اولین کرنش غیر الاستیک برابر صفر به دست خواهد آمد. مقادیر به دست آمده (تنش های حاصل از رابطه و کرنش های غیرالاستیک) در Cracking Strain و Yield Stress وارد می گردد.

$$\bar{\epsilon}_t^{ck} = \epsilon_t - \epsilon_{0t}^{el} \quad (7)$$

$$\epsilon_{0t}^{el} = \frac{\sigma_t}{E_0} \quad (8)$$

$$E_0 = E = 4700\sqrt{f'_c} \quad (9)$$

در روابط فوق  $\bar{\epsilon}_t^{ck}$  کرنش غیر الاستیک بتن در کشش (یا کرنش غیرالاستیک پس از ترک خوردگی بتن)،  $\epsilon_t$  کرنش کلی بتن در کشش،  $\epsilon_{0t}^{el}$  کرنش الاستیک بتن در کشش،  $E_0$  مدول الاستیسیته ی بتن،  $\sigma_t$  تنش کششی بتن می باشد. روند محاسبه خسارت کششی بتن مشابه با حالت فشاری است. خسارت کششی بتن طبق تعاریف ارائه شده در راهنمای نرم افزار شیب بار برداری نمودار را کنترل می کند. در بتن و مصالح بنایی هرچه کرنش های غیر الاستیک بیشتر شود، شیب بازگشت منحنی به میزان بیشتری از شیب اولیه نمودار (مدول الاستیسیته) تنزل می کند که سبب آن آسیب دیدگی مصالح است. به عنوان پیشنهاد می توان از رابطه زیر برای محاسبه خسارت فشاری بتن استفاده نمود [1]:

$$d_t = 1 - \frac{\sigma_t}{f_t} \quad (10)$$

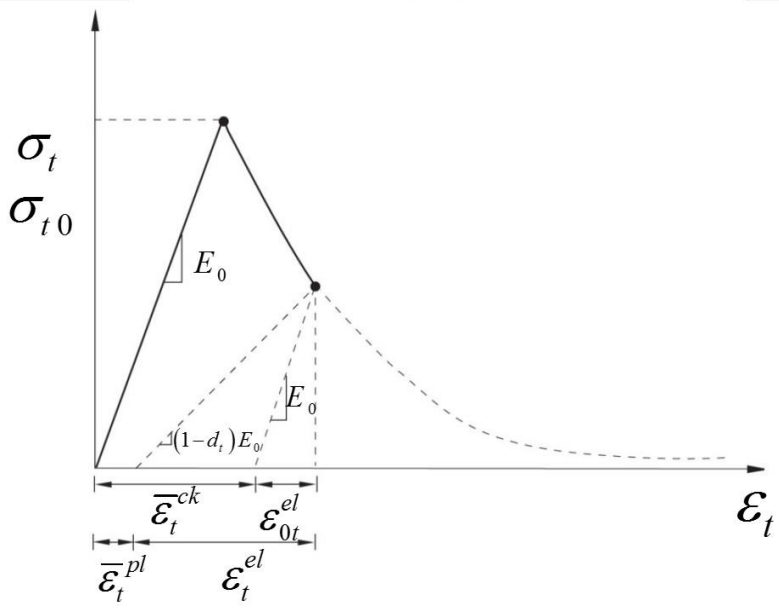
در این رابطه  $d_t$  پارامتر خرابی بتن در کشش است. بر خلاف رفتار فشاری در رفتار کششی با توجه به شروع نمودار تنش و کرنش غیرالاستیک از محل تنش ترک خوردگی یا بیشینه تنش کشش امکان استفاده از این رابطه برای مقدار اولیه تنش وجود دارد. همچنین برای تعیین خرابی بتن می توان از رابطه کوه استفاده نمود که در آن با داشتن کرنش پلاستیک  $\bar{\epsilon}_t^{pl}$ ، ضریب آلفا با اعمال شرایط مرزی و نتایج حاصل از آزمایش قابل تعیین است [7]:

$$d_t = 1 - \exp(-a_t \bar{\epsilon}_t^{pl}) \quad (11)$$

پس از محاسبه مقدار پارامتر خرابی بتن مقادیر کرنش های غیر الاستیک و مقدار خرابی در زبانه suboption و Cracking Strain و Damage Parameter وارد می شود. لازم به ذکر است چنانچه مقادیر پارامتر خرابی منفی بوده یا روند نزولی داشته باشد نشان دهنده خطا در عملیات محاسباتی است و تحلیل نرم افزار شروع نخواهد شد [1]. به صورت مشابه با رفتار فشاری در رفتار کششی نیز پس از محاسبه پارامتر خرابی، نرم افزار اقدام به محاسبه کرنش های پلاستیک کششی می کند ( $\bar{\epsilon}_t^{pl}$ )؛ در این مرحله چنانچه مقدار کرنش پلاستیک منفی شده یا روند نزولی داشته باشد نشانگر خطا در عملیات محاسباتی بوده و تحلیل در نرم افزار آغاز نمی گردد [1].

$$\bar{\epsilon}_t^{pl} = \bar{\epsilon}_t^{ck} - \frac{d_t}{(1-d_t)} \frac{\sigma_t}{E_0} \quad (12)$$

آخرین متغیر در تعریف رفتار کششی بتن بازیابی سختی برای تحمل فشار است. این متغیر در بارگذاری رفت و برگشتی موثر بوده و شیب رفتار مصالح را هنگامی که از بارگذاری کششی به بارگذاری فشاری وارد می شوند تعریف می کند؛ به عبارت دیگر بیانگر بازیابی سختی بتن در فشار پس از ترک خوردن در کشش است و از آنجا که بتن ترک خورده در کشش توانایی تحمل بارگذاری فشاری را داراست و مقدار این پارامتر برابر ۱ در نظر گرفته می شود.



شکل ۲- نمودار تنش- کرنش بتن، رفتار در کشش

### ۲.۲. میلگرد فولادی

در این پژوهش برای مدل سازی رفتار میلگرد فولادی از فرضیه ی انرژی واپیچش (distortion energy) بیشینه استفاده شده است. بر اساس این فرضیه، شکست زمانی به صورت تسلیم رخ می دهد که در هر نقطه از جسم، انرژی واپیچش در واحد حجم در حالت سه بعدی برابر با انرژی واپیچش در نمونه ی آزمایشی تحت کشش در لحظه ی تسلیم باشد. این معیار بر اساس تنش های اصلی به صورت زیر قابل بیان است [۸]:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (۱۳)$$

در رابطه بالا  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  به ترتیب تنش های اصلی در جهت X, Y, Z بوده و  $\sigma_y$  تنش تسلیم ماده است. برای تفسیر معیار تسلیم فون میسز در نرم افزار ABAQUS باید کرنش پلاستیک متناظر با تنش تسلیم فولاد، صفر در نظر گرفته شده و از این نقطه به بعد کرنش پلاستیک متناظر با هر تنش، از کسر کرنش الاستیک از کرنش کلی حاصل می شود. مشخصات در نظر گرفته شده برای میلگرد فولادی به شرح جدول زیر است:

جدول ۲- مشخصات میلگرد فولادی مورد استفاده در تحلیل

density(kg/m3)	Young's modulus(MPa)	Poisson's ratio
7800	200000	0.3
Yield stress(MPa)	413	620
Plastic strain	0	0.078

### ۳.۲. FRP

با توجه به اینکه رفتار FRP معمولاً به صورت ناهمسانگرد (ارتوتروپ) مدل می شود، در این حالت رابطه ی تنش- کرنش صفحه ای به قرار زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

در این رابطه  $E_1$  مدول الاستیسیته ی طولی،  $E_2$  مدول الاستیسیته ی عرضی،  $G_{12}$  مدول برشی و  $\gamma_{12}$  ضریب پواسون است. در این پژوهش برای تفسیر رابطه ی سختی ارتوتروپیک جهت مدل سازی مشخصات FRP در نرم افزار به ترتیب مدول الاستیسیته ی طولی و عرضی، ضریب پواسون و مدول های برشی وارد می شود. مدول های برشی  $G_{23}$  و  $G_{13}$  برای محاسبه ی تغییر شکل برشی عرضی در پوسته مورد نیاز است. مشخصات استفاده شده برای FRP در این پژوهش به شرح جدول زیر است:

جدول ۳- مشخصات FRP مورد استفاده در تحلیل

density(kg/m3)	$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$\gamma_{12}$	$G_{12}$ (MPa)	$G_{13}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)
1800	100750	1007.5	0.3	3270	3270	1860

در این پژوهش از دو جزء S4R و C3D8R برای مدل سازی بتن استفاده شده که جزئیات آن در بخش ۱.۱.۴ توضیح داده شده است. همچنین جزء مورد استفاده برای مدل سازی میلگرد فولادی T3D2 و جزء مورد استفاده برای مدل سازی FRP، S4R است. همچنین برای مدل سازی اندرکنش میلگرد فولادی و بتن از قید مدفون شدگی (embedded region) استفاده شده است. برای مدل سازی رزین اپوکسی از دو نوع اندرکنش اتصال کامل (tie) و اندرکنش تماسی (صفحه به صفحه) بین سطح FRP و سطح زیرین دال بتنی استفاده شده است. نتایج این دو فرض در اتصال FRP و بتن در شکل شماره ی ۶ ارائه شده است. برای محاسبه سختی رزین اپوکسی برای تماس صفحه به صفحه از رابطه ی زیر استفاده شده است [9]:

$$K_{ss} = K_{tt} = 1000 \left( 0.16 \times \frac{G_{epoxy}}{t_{epoxy}} + 0.47 \right) \quad (15)$$

در رابطه ی فوق  $t_{epoxy}$  ضخامت اپوکسی بر حسب mm و  $G_{epoxy}$  مدول برشی اپوکسی بر حسب GPa است. مشخصات مفروض برای اپوکسی در جدول زیر خلاصه شده است:

جدول ۴- مشخصات رزین اپوکسی و سطح تماس بتن و FRP

$K_{ss}$	G(MPa)	t(mm)
576	665	1

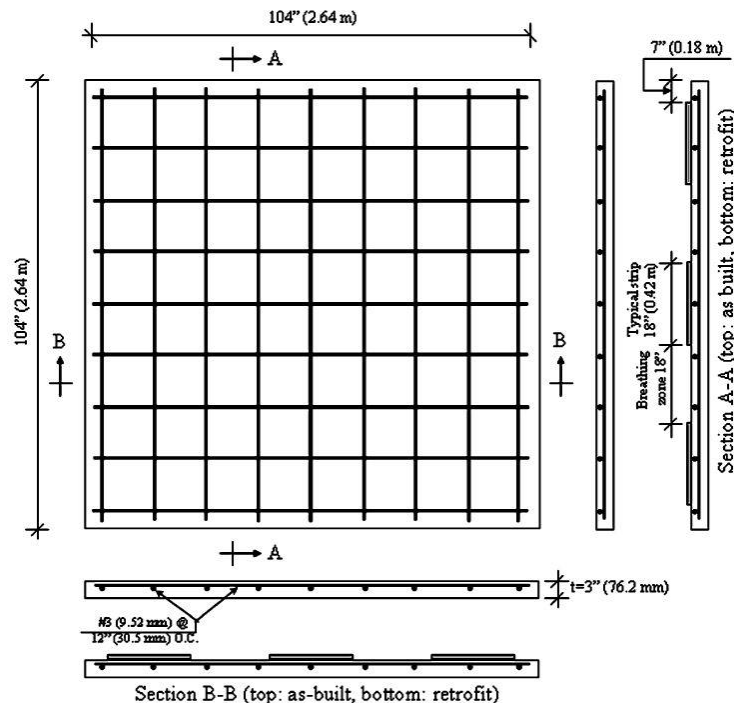
### ۳. مشخصات نمونه ی مورد تحلیل

در این بخش جزئیات نمونه ی آزمایشگاهی انتخاب شده برای انجام تحلیل اجزای محدود و یافتن پارامترهای خسارت مومسانی بتن و نمودارهای تنش-کرنش مناسب و همچنین انتخاب فرض مناسب در اتصال ورق FRP و بتن تشریح می شود.





مدل مورد بررسی در این پژوهش برگرفته از نمونهی آزمایشگاهی است که توسط مسلم در سال ۲۰۰۳ ساخته شده است [10]، مدل مزبور یک دال بتن آرمه به شکل مربع می باشد. طول دهانهی دال برابر ۲۶۷۰ میلیمتر و ضخامت آن برابر ۷۶ میلیمتر است. دال دارای میلگردهای فولادی در وجه کششی بوده و در فاصلهی ۳۰۵ میلیمتری در دو جهت متعامد قرار دارد (میلگرد گذاری ایزوتروپ). قطر میلگرد ۹/۵ میلیمتر و پوشش بتن برابر ۱۳ میلیمتر است. دال دارای تکیه گاه های ساده در چهار طرف بوده و بارگذاری به صورت گسترده یکنواخت بر سطح دال اعمال شده است. دال تقویت شده دارای مشخصات مشابهی با دال نمونهی شاهد است و به کمک نصب ورق های FRP در وجه کششی تقویت شده است. ورق های FRP از جنس کربن بوده و با رزین اپوکسی به سطح بتن متصل شده است. ورق های FRP در دو راستای متعامد و در جهت اضلاع دال با پهنای ۴۵۷ میلیمتر و فاصلهی ۴۵۷ میلیمتر از یکدیگر نصب شده اند. ضخامت لایه های FRP برابر ۰/۵۸ میلیمتر و دو لایه ی تقویتی اجرا شده است. ابعاد و جزئیات نمونه در شکل شماره ی ۳ قابل مشاهده است.



شکل ۳- جزئیات دال مورد بررسی

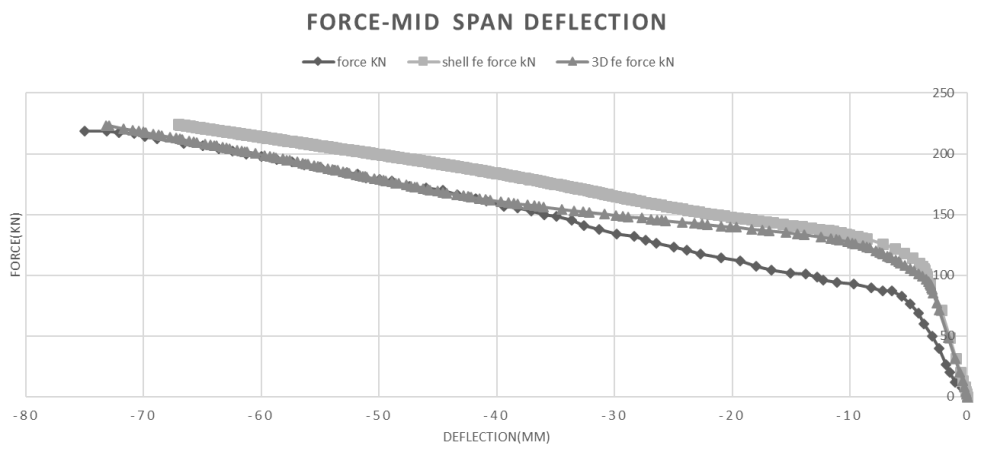
#### ۴. تحلیل و بررسی

##### ۱.۴ دال تقویت نشده

##### ۱.۱.۴ انتخاب رابطه های تنش- کرنش

در این قسمت پس از ساخت هندسه ی مدل و اعمال بارگذاری و شرایط مرزی مشخصات مصالح براساس توضیحات پیشین در نرم افزار اعمال شده است. متغیر مورد بررسی در این تحلیل ها نمودار و رابطه ی تنش- کرنش فشاری و کششی بتن می باشد. همچنین در حالت نخست برای مدلسازی بتن، المان پوسته از نوع S4R و برای مدلسازی میلگرد فولادی از rebar layer بهره جویی شده است. در حالت دوم از المان سه بعدی C3D8R برای مدلسازی بتن و از المان خرابایی T3D2 برای مدلسازی میلگرد فولادی استفاده شده است. بر اساس نتایج نمودار بار نهایی اعمال شده به دال در برابر خیز میانه ی

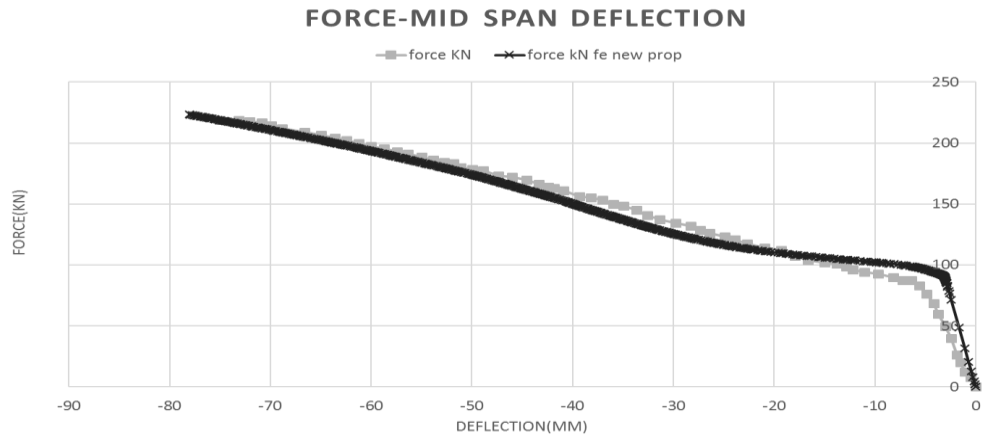
دال، رابطه‌ی ارائه شده توسط Wahalathantri و همکاران [11] از دقت مناسبی برخوردار بوده و برای ادامه‌ی پژوهش به کار گرفته شد. همچنین طبق انتظار المان سه بعدی از دقت بالاتری در مدلسازی بتن دال برخوردار است و این المان برای ادامه‌ی پژوهش انتخاب شده است.



شکل ۴- نمودار خیز میانه‌ی دال در برابر بار اعمال شده پس از انتخاب روابط تنش- کرنش بتن با انتخاب المان پوسته و سه بعدی برای بتن (مقایسه‌ی نتایج آزمایشگاهی و اجزای محدود)

**۲.۱.۴. بررسی پارامترهای خسارت مومسانی بتن**

در این بخش با انتخاب روابط تنش-کرنش بتن در کشش و فشار از بخش قبل، تحلیل حساسیت مدل نسبت به پارامترهای خسارت مومسانی بتن انجام می‌شود. با توجه به توضیحات پیشین پارامترهای زاویه‌ی اتساع و ویسکوزیته در بازه‌های قابل قبول قابل تغییر هستند و پارامترهای خروج از مرکزیت،  $k$  و  $F_{b0}/F_{c0}$  با مقادیر پیش فرض در تحلیل وارد می‌شوند. پس از انجام تحلیل‌های متعدد مقادیر این پارامترها مطابق جدول شماره‌ی ۵ انتخاب شده است. استفاده از مقادیر مناسب پارامترهای خسارت مومسانی بتن در این بخش منجر به نزدیکی بیش از پیش نمودارهای بار در برابر خیز مرکز دال برای نمونه‌ی آزمایشگاهی و تحلیل اجزای محدود شده است.



شکل ۵- نمودار خیز میانه‌ی دال در برابر بار اعمال شده پس از تصحیح پارامترهای خسارت مومسانی بتن

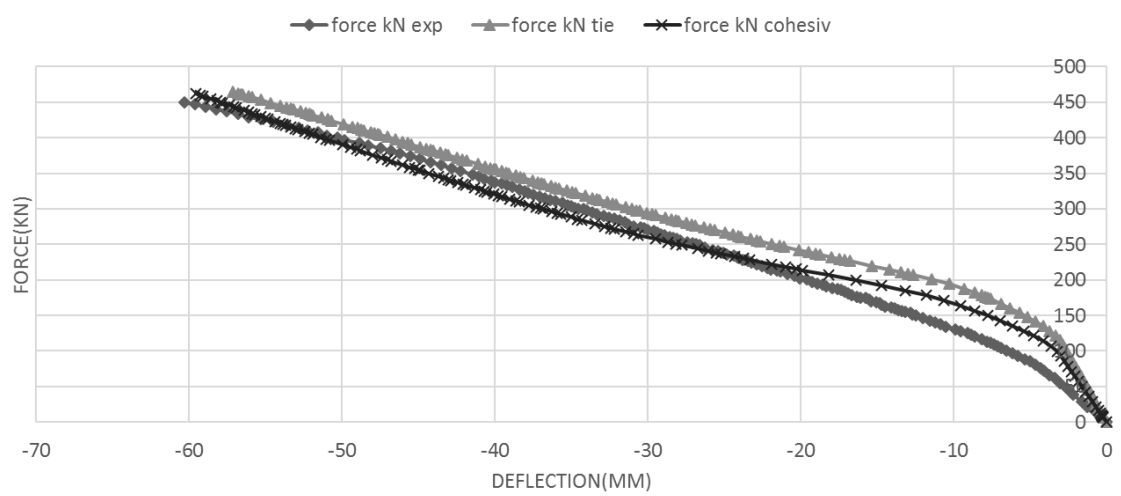
جدول ۵- پارامترهای خسارت مومسانی بتن در دو مرحله تحلیل

0.01	viscosity parameter	30	dilation angle	مدل اول (شکل شماره ۴)
0.001	viscosity parameter	40	dilation angle	مدل دوم (شکل شماره ۵)

۲.۴. دال تقویت شده با FRP

در این بخش به تحلیل دال تقویت شده با FRP در نرم افزار پرداخته شده است. برای صحت سنجی از مدل پیشین که توسط نوارهای متعامد FRP تقویت شده است استفاده شده. جزئیات نمونه‌ی مورد بررسی در بخش ۳ آمده است. در این قسمت پس از مدلسازی بتن، میلگرد فولادی و FRP و تعریف مشخصات مصالح از دو قید برای اتصال بتن و FRP استفاده شده است. در حالت نخست اتصال بتن و FRP توسط قید tie تامین شده است. این قید امکان ترکیب کردن دو سطح را که مش بندی آن‌ها با یکدیگر متفاوت است را می‌دهد [۱۲]. قید دوم اندرکنش تماسی و از نوع چسبنده است. با تعریف interaction property و سپس انتخاب contact و ایجاد cohesive behavior می‌توان سختی معادل رزین اپوکسی را در این بخش تعریف نمود، سپس با انتخاب surface to surface contact از بخش create interaction می‌توان سطح تحت کشش دال و سطح اتصال FRP را انتخاب کرده و ویژگی رفتار چسبنده را به اتصال این دو سطح تخصیص داد. لازم به ذکر است بر اساس توصیه‌ی منابع گوناگون در انتخاب سطوح master و slave در این قسمت برای هر یک از دو فرض توضیح داده شده، باید سطح با سختی و مدول الاستیسیته‌ی بیشتر به عنوان سطح master انتخاب گردد. نتایج تحلیل‌های اجزای محدود برای بار اعمال شده در برابر خیز میانه‌ی دال برای دو فرض پیشین با نتایج آزمایشگاهی در نمودار زیر مقایسه شده است. بررسی این نمودار نشان می‌دهد استفاده از ویژگی تماس چسبنده بین بتن و FRP مطابقت بهتری با نتایج آزمایشگاهی دارد.

FORCE-MID SPAN DEFLECTION FOR STRENGTHENED SLAB



شکل ۶- نمودار خیز میانه‌ی دال در برابر بار اعمال شده برای دال تقویت شده در دو حالت اتصال tie و cohesive



## ۵. نتیجه گیری

شبیه سازی مسائل مهندسی به روش اجزای محدود ملزوماتی دارد که از جمله مهمترین آنها تعریف خصوصیات مصالح و تعیین اندرکنش بین بخش های مختلف مساله است. در این پژوهش پارامترهای تاثیرگذار در تعیین رفتار بتن و همچنین تعدادی از روابط برای ایجاد نمودارهای تنش-کرنش بتن در فشار و کشش ارائه شده است. انتخاب صحیح پارامترهای خسارت مومسانی بتن و انتخاب رابطه ی تنش-کرنش متناسب با ویژگی های عضو مورد مدلسازی و تحلیل، منجر به نزدیکی قابل قبول نتایج تحلیل اجزای محدود با نتایج آزمایشگاهی می شود. طبق نتایج ارائه شده المان سه بعدی با داشتن گره های بیشتر و در نتیجه به وجود آمدن درجات آزادی بیشتر، دقت بالاتری در مدلسازی دال بتن آرمه علیرغم قرارگیری ابعاد دال (نسبت ضخامت به طول) در بازه ی کاربردی المان های پوسته دارد. همچنین ایده ی مدلسازی اندرکنش FRP و بتن به کمک ویژگی رفتار چسبیده در نرم افزار ABAQUS باعث می شود تا با داشتن خروجی های تنش برشی در سطح تماس FRP و بتن (چسب یا رزین اپوکسی) تعیین جدا شدن FRP از سطح بتن به عنوان یک حالت شکست امکان پذیر باشد.

## ۶. مراجع

- ۱- رضا شهبازی، محمد یکرنگ نیا، "راهنمای کاربردی ABAQUS به همراه مسائل مهندسی عمران سازه و ژئوتکنیک"، انتشارات علم عمران، ویرایش سوم، ۱۳۹۵
- 2-Kmiecik, P., and M. Kamiński. "Modelling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration." Archives of civil and mechanical engineering 11, no. 3 (2011): 623-636.
- ۳- میرنقی موسوی، بهزاد رافضی، فتح اله عثمان زاده و الشن آهنی، ۱۳۹۲، تعیین پارامترهای مدل خسارت پلاستیک بتن برای مدل سازی عددی قاب های بتن آرمه، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان
- ۴- ناهید عسکری زاده و محمدرضا محمدی زاده، ۱۳۹۳، تشریح پارامترها و نحوه بدست آوردن داده های ورودی در نرم افزار اجزا محدود آباکوس برای مدلسازی انواع سازه های بتن مسلح، اولین همایش ملی مهندسی سازه ایران، تهران، انجمن علمی مهندسی سازه ایران
- 5- Hafezolzghorani, Milad, Farzad Hejazi, Ramin Vaghei, Mohd Saleh Bin Jaafar, and Keyhan Karimzade. "Simplified damage plasticity model for concrete." Structural Engineering International 27, no. 1 (2017): 68-78.
- ۶- حمید شیرازی، "رفتار چرخه ای اتصالات تیر-ستون بتنی با توجه به جزییات آرماتورگذاری و نوع بتن مصرفی در هسته ی اتصال". پایان نامه دکتری تخصصی (PhD)، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، ۱۳۹۰
- 7- Koh, C. G., M. Q. Teng, and T. H. Wee. "A plastic-damage model for lightweight concrete and normal weight concrete." International Journal of Concrete Structures and Materials 2, no. 2 (2008): 123-136.



۸- آ. سی. اوگرال، اس. سی. فنستر، "مقاومت مصالح"، ترجمه: انوشیروان فرشیدیان فر، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۹۳

9- Obaidat, Yasmeeen Taleb. "Structural Retrofitting of Concrete Beams Using FRP." Department of Construction Sciences, Structural Mechanics, Lund University, Lund, Sweden (2011).

10- Mosallam, Ayman S., and Khalid M. Mosalam. "Strengthening of two-way concrete slabs with FRP composite laminates." Construction and building materials 17, no. 1 (2003): 43-54

11- Wahalathantri, Buddhi Lankananda, D. P. Thambiratnam, T. H. T. Chan, and Sabrina Fawzia. "A material model for flexural crack simulation in reinforced concrete elements using ABAQUS." In Proceedings of the first international conference on engineering, designing and developing the built environment for sustainable wellbeing, pp. 260-264. Queensland University of Technology, 2011.

۱۲- سهیل سروشنیاءادی نجفی، محمدحسین ممقانی، مرتضی مهروند، "کامل ترین مرجع کاربردی ABAQUS پیشرفتهی عمران"، انتشارات نگارندهی دانش، ۱۳۹۵

13- Karthik, Madhu M., and John B. Mander. "Stress-block parameters for unconfined and confined concrete based on a unified stress-strain model." Journal of Structural Engineering 137, no. 2 (2011): 270-273.

14- Kent, Dudley Charles, and Robert Park. "Flexural members with confined concrete." Journal of the Structural Division (1971).

15- Carreira, Domingo J., and Kuang-Han Chu. "Stress-strain relationship for plain concrete in compression." In Journal Proceedings, vol. 82, no. 6, pp. 797-804. 1985.

16- Thorenfeldt, El. "Mechanical properties of high-strength concrete and applications in design." In Symposium Proceedings, Utilization of High-Strength Concrete, Norway, 1987. 1987.

17- Mander, John B., Michael JN Priestley, and R. Park. "Theoretical stress-strain model for confined concrete." Journal of structural engineering 114, no. 8 (1988): 1804-1826.

18- Popovics, Sandor. "A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete." Cement and concrete research 3, no. 5 (1973): 583-599.

19- Hsu, L. S., and C-TT Hsu. "Complete stress—strain behaviour of high-strength concrete under compression." Magazine of concrete research 46, no. 169 (1994): 301-312.

20- Sinha, B. P., Kurt H. Gerstle, and Leonard G. Tulin. "Stress-strain relations for concrete under cyclic loading." In Journal Proceedings, vol. 61, no. 2, pp. 195-212. 1964.

21- Wang, Taijun, and Thomas TC Hsu. "Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models." Computers & structures 79, no. 32 (2001): 2781-2791.



ISC  
Islamic World Science Cluster Center  
۹۸۱۹۵-۹۹۹۱۱

هفتمین کنفرانس ملی  
پژوهش های کاربردی در

مهندسی عمران، معماری و مدیریت شهری

www.CAUP.ir

ISC  
Islamic World Science Cluster Center  
۹۸۱۹۵-۹۹۹۱۱

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت راه و شهرسازی

۷. پیوست ها

۱۰۷. پیوست ۱: روابط و نمودارهای تنش-کرنش فشاری بتن

ردیف	نام رابطه	متغیرهای رابطه	فرمول ارائه شده	دسته ی شماتیک
۱	Hognestad [13]	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1})$	$\sigma_c = f'_c (2\eta - \eta^2)$ $\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}$	Type 1
۲	Madrid parabola [13]	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1}, E)$	$\sigma_c = E \epsilon_c \left( 1 - 0.5 \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right) \right)$ $\epsilon_{c1} = 0.7 (f'_c)^{0.31}$	Type 1
۳	Kent and Park [14]	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1})$	$\sigma_c = f'_c \left( 2 \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right) - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right)$	Type 1
۴	Majewski [13]	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1}, E)$	$\sigma_c \leq e_{\lim} f'_c \rightarrow \sigma_c = E_c \epsilon_c$ $\sigma_c > e_{\lim} f'_c \rightarrow \sigma_c = \left( \begin{array}{l} f'_c \frac{(e_{\lim} - 2)^2}{4(e_{\lim} - 1)} \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \\ -f'_c \frac{(e_{\lim} - 2)^2}{2(e_{\lim} - 1)} \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right) \\ +f'_c \frac{e_{\lim}^2}{4(e_{\lim} - 1)} \end{array} \right)$ $e_{\lim} = 1 - \exp\left(\frac{-f'_c}{80}\right)$ $E_c = \frac{f'_c}{\epsilon_{c1}} (2 - e_{\lim})$	Type 1



ISC  
Islamic World Science Citation Center  
۹۸۱۹۵-۹۹۹۱۱

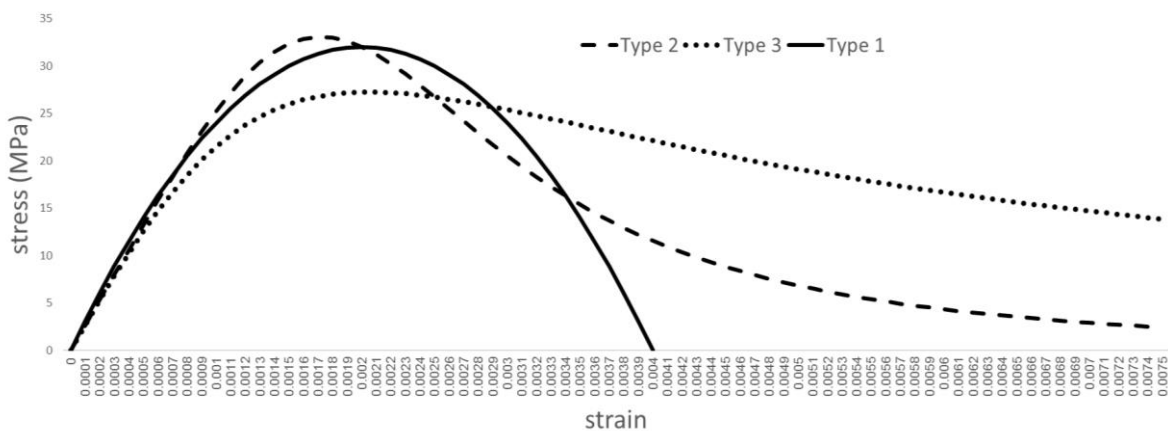
ISC  
Islamic World Science Citation Center  
۹۸۱۹۵-۹۹۹۱۱

Type 2	$\sigma_c = \frac{\beta_c f'_c (\epsilon_c / \epsilon_{c1})}{\beta_c - 1 + (\epsilon_c / \epsilon_{c1})^{\beta_c k_2}}$ $\beta_c = \frac{1}{(1 - f'_c) / (\epsilon_c E)}$ $k_2 = (42.5 / f'_c)^{1.3}$	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1}, E)$	Carreira and Chu [15]	۵
Type 2	$\sigma_c = f'_c \left( \frac{n \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)}{(n-1) + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^{nk}} \right)$ $n = 0.8 + \frac{f'_c}{17}$ $0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c1} \rightarrow k = 1$ $\epsilon_{c1} \leq \epsilon_c \rightarrow k = 0.67 + \frac{f'_c}{62}$	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1})$	Thorenfeldt [16]	۶
Type 2	$\epsilon_c \leq 2\epsilon_{c1} \rightarrow \sigma_c = \frac{f'_c x r}{r - 1 + x^r}$ $\epsilon_c > 2\epsilon_{c1} \leq \epsilon_u \rightarrow \sigma_c = \left( \frac{2f'_c r}{r - 1 + 2^r} \right) \left( \frac{\epsilon_u - \epsilon_c}{\epsilon_u - 2\epsilon_{c1}} \right)$ $x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}$ $r = \frac{E}{E - \left( \frac{f'_c}{\epsilon_{c1}} \right)}$	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1}, E)$	Mander [17]	۷
Type 3	$\sigma_c = f'_c \left( \frac{n \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)}{(n-1) + \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^n} \right)$ $n = 0.8 + \frac{f'_c}{17}$	$\sigma_c = f(f'_c, \epsilon_{c1})$	Popovics [18]	۸



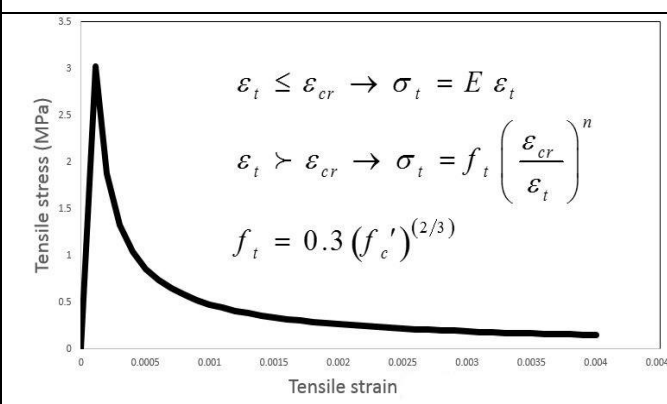
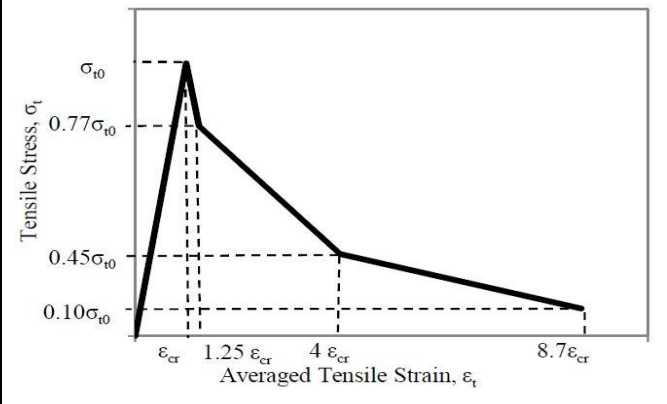
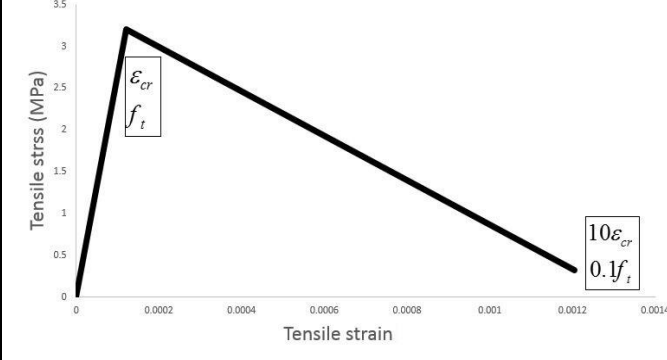
Type 3	$\sigma_c = f_c' \left( \frac{\beta \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)}{(\beta - 1) + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^\beta} \right)$ $\beta = \frac{1}{1 - \left( \frac{f_c'}{\varepsilon_{c1} E_0} \right)}$ $\varepsilon_{c1} = 8.9 \times 10^{-5} f_c' + 2.114 \times 10^{-3}$ $E_0 = 1.2431 \times 10^2 f_c' + 3.28312 \times 10^3$ $1MPa = 0.145037743 \text{ kip/in}^2$	$\sigma_c = f(f_c', \varepsilon_{c1}, E)$	Wahalathantri, Hsu and Hsu [11,19]	۹
Type 3	$\sigma_c = \frac{E \varepsilon_c}{1 + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}$ $\varepsilon_{c1} = 0.7 (f_c')^{0.31}$	$\sigma_c = f(f_c', \varepsilon_{c1}, E)$	Desay and Krishnan [13]	۱۰
Type 3	$\sigma_c = \frac{3E \varepsilon_c}{2 + \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^3}$	$\sigma_c = f(\varepsilon_{c1}, E)$	Tulin and Gristle [20]	۱۱

توضیح: در جدول فوق روابطی که ضریب تبدیل ندارد با واحد MPa قابل محاسبه است، همچنین در این روابط  $f_c'$  به معنای مقاومت فشاری بتن،  $\varepsilon_{c1}$  به معنای کرنش نظیر مقاومت فشاری بتن و  $E$  به معنای مدول الاستیسیتهی بتن است. در روابطی که برای دستیابی به  $\varepsilon_{c1}$  و  $E$  فرایندی ارائه نشده است می توان از فرض های آیین نامه ای نظیر ۰,۰۰۲ برای کرنش نظیر مقاومت فشاری و  $E = 4700 \sqrt{f_c'}$  برای مدول الاستیسیتهی بتن استفاده کرد.



شکل ۷- نمودارهای شماتیک برای روابط تنش-کرنش فشاری بتن



ردیف	نام رابطه	متغیرهای رابطه	نمودار شماتیک و فرمول ارائه شده
۱	Wang and Hsu [21]	$\sigma_t = f(f'_c, E, n)$	 <p> <math>\varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr} \rightarrow \sigma_t = E \varepsilon_t</math>  <math>\varepsilon_t &gt; \varepsilon_{cr} \rightarrow \sigma_t = f_t \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_t} \right)^n</math>  <math>f_t = 0.3 (f'_c)^{(2/3)}</math> </p>
۲	Wahalathantri [11]	$\sigma_t = f(f'_c, E)$	 <p> <math>\sigma_{t0}</math>  <math>0.77\sigma_{t0}</math>  <math>0.45\sigma_{t0}</math>  <math>0.10\sigma_{t0}</math>  <math>\varepsilon_{cr}</math> <math>1.25 \varepsilon_{cr}</math> <math>4 \varepsilon_{cr}</math> <math>8.7 \varepsilon_{cr}</math>            Averaged Tensile Strain, <math>\varepsilon_t</math> </p>
۳	Simplified method	$\sigma_t = f(f'_c, E)$	 <p> <math>\varepsilon_{cr}</math>  <math>f_t</math>  <math>10\varepsilon_{cr}</math>  <math>0.1f_t</math>            Tensile stress (MPa)            Tensile strain         </p>

توضیح: در جدول فوق روابط با واحد MPa قابل محاسبه است، همچنین در این روابط  $f'_c$  به معنای مقاومت فشاری بتن،  $\varepsilon_{cr}$  به معنای کرنش نظیر مقاومت کششی بتن (کرنش ترک خوردگی بتن)،  $E$  به معنای مدول الاستیسیتهی بتن،  $f_t$  به معنای مقاومت کششی بتن و  $n$  پارامتر نرخ تضعیف مقاومت بتن با بازه‌ی متداول ۰٫۴ تا ۱٫۵ است. در روابطی که برای دستیابی به  $f_t$  و  $E$  فرایندی ارائه نشده است می‌توان از فرض‌های آیین‌نامه‌ای نظیر  $f_t = 0.3(f'_c)^{(2/3)}$  برای مقاومت کششی بتن و  $E = 4700\sqrt{f'_c}$  برای مدول الاستیسیتهی بتن استفاده کرد.