

# پایداری رده‌ای از سیستم‌های غیرخطی تکین با تاخیر متغیر در حالت و عدم قطعیت پارامتری با در نظر گرفتن قید عملگر و کاربرد آن در ربات خودگردان زیرسطحی

محمد هدایتی خدایاری

دانشجوی دکتری کنترل، گروه مهندسی کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

ناصر پریز\*

استاد، گروه مهندسی کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

سعید بلوچیان

دانشیار، گروه مهندسی کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی، گناباد، ایران

## چکیده

در این مقاله، مساله پایداری مقاوم یک ربات خودگردان زیرآبی که سامانه‌ای با تاخیر متغیر با زمان، ناپیچینی متغیر با زمان در مدل و دارای محدودیت در دامنه سیگنال ورودی عملگر است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به مساله تکین بودن سیستم، هدف اصلی صرفاً پایداری نبوده بلکه منظم بودن و عاری بودن پاسخ حلقه بسته سیستم از توابع ضربه نیز است. نحوه برخورد با ناپیچینی، قید اشباع و تاخیر زمانی، به ترتیب استفاده از روش نرم محدود، پلی تاپیک و پایداری وابسته به تاخیر است. بنابراین، قضیه‌ای جهت تضمین پایداری سیستم حلقه بسته بر اساس نامساوی‌های ماتریسی شبه خطی تبیین و اثبات می‌شود و در ادامه جهت نمایش کارایی، با ارائه نتایج شبیه‌سازی، برتری این تکنیک با مراجع معتبر از منظر محافظه‌کاری مقایسه می‌گردد. دامنه و حوزه این روش دربرگیرنده سیستم‌های معمولی تاخیردار و سیستم‌های خنثی تاخیری با تاخیر چندگانه در حالت است. ما در ادامه بر خلاف رویه معمول مدل‌های فضای حالت، برای نخستین بار مدلی تکین از یک ربات خودگردان زیرآبی استخراج کرده و پایداری مقاوم آن را در وضعیت‌های مختلف با این قضیه بررسی می‌کنیم. **واژه‌های کلیدی:** ربات خودگردان زیرآبی، مدل غیرخطی، سیستم تکین (توصیفی)، ناپیچینی، نامساوی‌های دو خطی، نامساوی‌های ماتریسی.

## Stabilisation a Class of Nonlinear Singular System in Presence of Time-Varying Delay in States, Uncertainty in Parameters and Actuator Constraints with its Application on AUV

M. Hedayati Khodayari

Department of Electrical Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Ira

N. Pariz

Department of Electrical Engineering, Ferdowsi University, Mashhad, Iran

S. Balochian

Department of Electrical Engineering, Islamic Azad University, Gonabad, Iran

## Abstract

In this essay, we investigate the problem of Autonomous Underwater Vehicle (AUV) robust stabilisation including time-varying delay, time-variable uncertainty in modeling, and input amplitude constraint of actuators. Due to system singularity, the main aim is not only stabilisation but also include regularity, and impulse free response for the closed loop system. Encountering methods to model uncertainty, saturation constraint and time-delay are norm bounded method, polytopic method, and delay-dependent criteria respectively. Here a new theorem is introduced and then is proved for the close loop stabilisation through Bilinear Matrix Inequality (BMI). We compare the superiority of this technique by some significant literature via simulation examples from conservatism aspect. Method scope includes both retarded and neutral time-delay systems with multiple delays in states. In continue, for the first time against of conventional state space model methods, we obtain a new descriptor model of an AUV and investigate its robust stability in different conditions based on presented theorem.

**Keywords:** Autonomous Underwater Vehicle, nonlinear model, singular (descriptor) system, uncertainty, Bilinear Matrix Inequalities, Matrix Inequalities.

## ۱- مقدمه

خصوص در مدل فضای حالت<sup>۳</sup> صورت گرفته است که می‌تواند در مقایسه با فضای سیستم‌های تکین (توصیفی) صرفاً یک حالت خاص منظور گردد و توان تبیین ضعیفتری در مدلسازی را دارا است. چارچوب کنترلی ربات زیرسطحی را می‌توان مطابق شکل ۱ به سه زیرسیستم اصلی تقسیم کرد: هدایت، ناوبری و کنترل یا به اختصار GNC<sup>۴</sup>.

امروزه ماموریت صنایع دریایی در گستره اقیانوسها و فراساحل با چالش‌های متعددی روبرو است و نیاز به ربات‌های خودگردان زیرآبی<sup>۱</sup> را جهت کاربردهایی نظیر اکتشاف، امداد و نجات و مسائل زیست محیطی دو چندان نموده است. دشواری محاسبه ضرایب هیدرودینامیکی، نامعینی‌ها، وابسته بودن پارامترهای مدل به سرعت ربات، تزویج دینامیکها<sup>۲</sup>، بکارگیری در نقاط مختلف کاری و از سویی دیگر وجود منابع اغتشاش متفاوت آبی، پایداری سازی چنین سیستم‌هایی را محل چالش محققین نموده است [1]. اکثر بررسی‌های صورت گرفته در این

<sup>3</sup> State space

<sup>4</sup> Guidance-Navigation-Control

<sup>1</sup> Autonomous Underwater Vehicle (AUV)

<sup>2</sup> Dynamic coupling

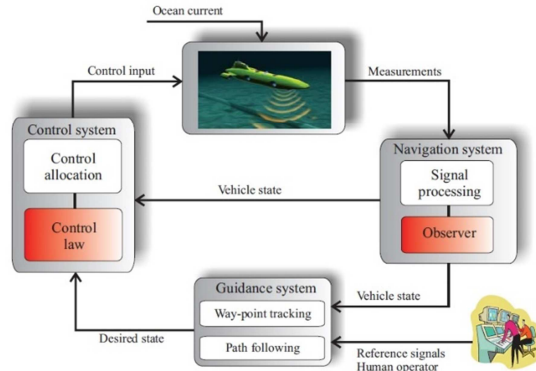
\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: n-pariz@um.ac.ir

می‌توان از روش Anti-windup و یا روش دیگر CNF<sup>9</sup> نام برد [4]. ایده اصلی روش نخست مبتنی بر ارایه پسخورهای کمکی به صورتی است که در نهایت محرک در محدوده مجاز خود باقی بماند. بنابراین هر چند این روش در بیشتر مواقع عملکرد را ارتقاء می‌دهد، ولی شاخصهای پایداری را چندان تثبیت نمی‌کند و نسبت به شرایط اولیه وابستگی و حساسیت بیشتری دارد. در روش CNF یک عبارت غیرخطی به قانون کنترلی خطی اضافه می‌شود تا رفتار گذرای سیستم را ارتقاء بخشد. این روش در بسیاری از سیستمهای کاربردی استفاده می‌شود هر چند نقاط ضعفی را با توجه به غیرخطی شدن به همراه دارد. روش استفاده شده جهت مدیریت اشباع در این مقاله روش چند مقوله ای<sup>10</sup> است. با استفاده از این روش به صورت کلی سیستم غیرخطی دارای تابع اشباع، به یک تابع خطی تبدیل خواهد شد.

تاخیر زمانی، همواره به عنوان یکی از چالشهای جدی محققین مطرح بوده است بطوریکه می‌تواند در بعضی از سامانه‌ها منجر به پایین آمدن عملکرد، نوسان و حتی ناپایداری شود هر چند در بعضی از موارد در یک محدوده مشخص می‌تواند منجر به پایداری بهتر نیز گردد [5]. تاخیر هنگامی که به صورت متغیر با زمان در سیستم وجود داشته باشد تمهیدات بیشتری را جهت پایدارسازی مترتب خواهد نمود خصوصا در مواردی نظیر کنترل ترافیک شبکه های کامپیوتری<sup>11</sup>. در یک نگاه و دسته‌بندی کلی کنترل این سیستمها به دو دسته وابسته به تاخیر<sup>12</sup> و مستقل از تاخیر<sup>13</sup> تقسیم می‌شوند. البته حالت دوم خصوصا در تاخیرات کوچک دارای محافظه کاری بالاتری خواهد بود. این پیچیدگی هنگامی که سیستم در حالت تکین (توصیفی) قرار گیرد دشواری کنترلی بیشتری به همراه خواهد داشت. بررسی این سیستمها از دو روش 1- حوزه زمان (تابعی لیاپانوف<sup>14</sup> LKF) و تابع رازومیکین<sup>15</sup>) و همچنین 2- حوزه فرکانس (روش تحلیلی<sup>16</sup> یا مستقیم) قابل انجام خواهد بود [6]. گفتنی است که روش محدوده فرکانسی تنها برای سیستمهای تاخیردار با تاخیر زمانی ثابت کارایی بهتری دارند زیرا که اگر تاخیر زمانی، نامعلوم یا متغیر با زمان باشد یافتن ریشه‌های معادله مشخصه و تعیین علامت آنها دشوار می‌شود. روش رازومیکین در دسته وسیعتری از سیستمها پاسخگو است در حالیکه ممکن است در تعدادی از آنها روش لیاپانوف کراسوفسکی پاسخگو نباشد، ولی با توجه به استفاده بیشتر از اطلاعات تاخیر در روش کراسوفسکی این روش در بدست آوردن شرایط پایداری، دارای محافظه کاری کمتری است.

با توجه به مزایا و ومعایب روشهای عنوان شده، حوزه تاخیری مد نظر این مقاله در دسته تاخیرات پیوسته متغیر با زمان و بصورت وابسته بوده و تکنیک در نظر گرفته شده، روش زمانی تابعی لیاپانوف است.

ربات خودگردان زیرآبی با توجه به محیط آبی با پهنای باند محدودی در ارتباط روبروست لذا در مد دریافت سیگنال از ایستگاه کنترل در فواصل دور دارای تاخیر زمانی ناهمگون است. این موضوع به غیر از تاخیرهای متداول در عملگرها، تاخیر انسانی مرکز کنترل،



شکل 1- نمایی کلی از هدایت، ناوبری و کنترل ربات زیرسطحی [2].

کیفیت بخش کنترل ربات در همکاری متناسب با سایر زیرسامانه ها به طور حتم در موفقیت ماموریت نقش بسزایی خواهد داشت.

سیستم های تکین به عنوان تعمیمی بر سیستم‌های کلاسیک، جایگاه ویژه‌ای در مدل‌کردن و تحلیل پدیده‌های پیچیده در علوم مهندسی پیدا کرده‌اند. این سیستمها با توجه به کاربردهای آنها دارای عناوین دیگری نظیر سیستمهای توصیفی<sup>1</sup>، نیمه‌حالت<sup>2</sup>، یا جبری-دیفرانسیلی<sup>3</sup> می‌باشند.

علاوهم تنوع وسیع کاربردی این سیستمها و قدرت توصیف بالاتر دینامیکها، کنترل چنین سیستمهایی دارای پیچیدگیهای خاصی بوده و می‌بایست جهت نیل به پاسخ مطلوب علاوه بر پایداری به مواردی نظیر منظم بودن<sup>4</sup> و آزاد بودن از پاسخ ضربه<sup>5</sup> نیز توجه شود تا سیستم یک سیستم مجاز<sup>6</sup> تلقی گردد. سیستمهای تکین دارای خواص ویژه‌ای نظیر علی<sup>7</sup> نبودن و یا دارای چند جمله‌ای بودن تابع تبدیل (سره نبودن) می‌باشند. این سیستمها ممکن است به ازای ورودی پیوسته دارای خروجی ناپیوسته باشند. مدل فضای حالت، پاسخگوی سیستمهایی با قیود جبری درکنار معادلات دیفرانسیلی نیستند. عموما در رباتها و سیستمهای مکانیکی دینامیکهای زیرسیستمها با معادلات دیفرانسیل تبیین و محدودیتهای مربوط به ارتباط زیرسیستمها با یکدیگر از طریق معادلات جبری مشخص می‌شوند. با توجه به عدم وجود جعبه ابزار کافی در حوزه پردازش و الگوریتمهای مفید در دهه‌های گذشته، تلاشهای محققین در دهه‌های قبل کم اثر بوده است [3]. برای بدست آوردن پاسخ سیستمهای تکین می‌بایست معادلاتی موسوم به معادلات دیفرانسیل-جبری<sup>8</sup> را حل نمود. در همین راستا وجود معادلات جبری در کنار معادلات دیفرانسیلی موجب پیدا شدن ویژگیهای منحصر به فردی برای این سیستمها می‌شود که روند تحلیل را نسبت به سیستمهای معمولی پیچیده‌تر می‌کند.

یکی از قیود اصلی در سیستمهای دینامیکی محدوده عملکرد عملگرها است بطوریکه با ورود به ناحیه اشباع سیستم کاملا غیرخطی شده و ممکن است ناپایداری را در برداشته باشد. تلاشهای متنوعی در این خصوص در دهه‌های اخیر صورت گرفته است به عنوان نمونه

<sup>9</sup> Composite Nonlinear Feedback

<sup>10</sup> Polytopic

<sup>11</sup> Network Control System

<sup>12</sup> Delay-Dependent

<sup>13</sup> Delay-Independent

<sup>14</sup> Lyapunov Krasovskii Functional

<sup>15</sup> Razumikhin Theorem

<sup>16</sup> Analytical Method

<sup>1</sup> Descriptor

<sup>2</sup> Semi-State

<sup>3</sup> Algebraic-Differential

<sup>4</sup> Regularity

<sup>5</sup> Impulse free

<sup>6</sup> Admissible

<sup>7</sup> Casual

<sup>8</sup> Differential-Algebraic Equations

حساسه‌ها (مثلا جاپرو- قطب‌نما)، سیستم رانش و سایر مکانیزمها است.

حسب نایقینی در محاسبات ضرایب هیدرودینامیکی، ربات زیرسطحی حتی با وجود پیشرفت در نرم‌افزارها، جعبه ابزارها و روشهایی نظیر دینامیک سیالات محاسباتی<sup>1</sup> باز هم در نتایج تستهای میدانی با محاسبات و شبیه سازیها خطاهایی از حدود ۱۵ تا ۱۰۰ درصد را شامل می‌شود [7]. این موضوع خود منجر به مدلی نادقیق شده و کاهش عملکرد را به دنبال دارد. لذا می‌بایست در این خصوص، عامل نایقینی را در پارامترهای طراحی سیستم در نظر داشت. در بعضی از مراجع اختلاف محاسبات ضرایب هیدرودینامیک AUV با نتایج تستهای میدانی به بیش از ۱۰۰ درصد نیز رسیده است [7].

با توجه به این چالشها، پیچیدگی زیادی در مواجهه با کنترل یک سیستم توصیفی تاخیری دارای نایقینی که دارای محدودیت عملکرد نیز است وجود خواهد داشت. بخصوص اگر این سیستم موردی نظیر یک ربات زیرسطحی باشد که با سایر چالشها نظیر اغتشاش و پارامتر ریسک از دست رفتن نیز روبرو است. با توجه به کلیه محدودیتهای عنوان شده و با توجه به بررسی مولفین مقاله، تاکنون مرجع و تحقیقی با محدودیتهای ذکر شده برای یک ربات خودگردان زیرسطحی وجود نداشته است.

در این مقاله سعی گردیده است با اجتناب از محاسبات سنگین سیستم تکین و در نظر گرفتن حداقل محافظه کاری، مساله را با استفاده از تکنیکهای نامساویهای شبه‌خطی پوشش داده و الزامات قیود عملکردها، وجود پاسخ ضربه در سیستم، آثار نامطلوب تاخیر متغیر و مقاوم بودن را به صورت همزمان مرتفع نماییم.

با توجه به عمومیت صورت مساله می‌توان این موضوع را مطرح نمود که دستاوردهای قضیه این مقاله علاوه بر AUV، به سایر دینامیکهای دیگر مشابه قابل تعمیم بوده و راهگشای چالشهای عنوان شده در ماموریت این سامانه‌ها خواهد بود.

پیکره بندی مقاله در ادامه بدین شرح است: در بخش ۲ تشریح ساختار مساله و مقدمات ریاضی مورد نیاز ارایه می‌شود. بیان قضیه و اثبات آن در بخش ۳ تبیین می‌شود و به دنبال آن با مثالهای عددی و شبیه‌سازی مقایسه با سایر مراجع انجام شده است. در بخش ۴ مدل تکین ربات خودگردان زیرسطحی استخراج شده و در ادامه در بخش ۵ شبیه‌سازی قضیه بر روی این مدل نمایش داده می‌شود و در بخش ۶ نتیجه‌گیری آمده است و در نهایت در بخش ۷ علائم و نمادهای اصلی استفاده شده ارایه می‌شود.

## ۲- تشریح صورت مساله، تعاریف و مقدمات اولیه

در این بخش چند تعریف و لم‌های مورد نیاز و سیستم پایه مدنظر معرفی می‌شود.

سیستم تکین غیرخطی تاخیری دارای نایقینی و با قید اشباع عملکرد مطابق معادله (۱) را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-h(t)) \\ \quad + Bs(u(t)) \\ x(t) = \phi(t) \quad t \in [-h, 0] \\ 0 \leq h(t) \leq h_{\max} \quad \dot{h}(t) \leq d_1 < 1 \end{cases} \quad (1)$$

در اینجا  $x(t) \in R^n$  بردار حالت،  $u(t) \in R^m$  بردار کنترل ورودی و ماتریسهای  $A_0, A_d, E \in R^{n \times n}$  و  $E$  ماتریسهای ثابت، حقیقی با ابعاد متناسب می‌باشند بطوریکه  $rank E = r \leq n$  نیز بردار شرایط اولیه است که دارای المانهایی از جنس توابع پیوسته است.  $d_1$  نرخ بالای تغییرات تاخیر است. همچنین تابع اشباع  $sat(u(t))$  به صورت ذیل قابل تعریف است:

$$\begin{aligned} sat(u(t)) &= [sat(u_1(t)), \dots, sat(u_m(t))]^T \\ sat(u_i(t)) &= sign(u_i(t)) \min\{|u_i|, \bar{u}_i\} \quad \bar{u}_i > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$\bar{u}_i > 0$  بیشینه دامنه مجازه اندازه مولفه ورودی  $i$ -ام است. مولفه های  $\Delta A_0, \Delta A_d$  بیانگر نایقینی ضرایب هیدرودینامیکی و یا سایر نایقینی‌های سیستم هستند. برای حل عددی این معادلات با روش مستقیم (فرکانسی یا تحلیلی) یا حل عددی، می‌توان به مرجع [8] اشاره نمود.

تعریف ۱- [9]: سیستم (۱) را ضربه آزاد گوئیم هر گاه  $deg(SI-A) = rank E$

تعریف ۲- [4]: سیستم (۱) را منظم گوئیم هرگاه  $rank E \neq deg(SI-A)$ . شرط منظم بودن در واقع تضمین پاسخ یکتاست.

تعریف ۳- سیستم تکین پایدار است هرگاه تمام ریشه‌های  $|(SI-A)| = 0$  مقدار حقیقی منفی داشته باشند.

تعریف ۴- [4]: سیستم (۱) را مجاز گوئیم هر گاه پایدار، منظم و ضربه آزاد باشد.

تعریف ۵- [4]: در سیستم (۱) اگر زوج  $(E, A_0)$  منظم و ضربه آزاد باشند آنگاه پاسخ سیستم از بازه شروع به بعد وجود داشته و یکتا خواهد بود. هدف اصلی ما در این مقاله دستیابی به تعریف ۴ خواهد بود.

لم ۱- (مکمل شور<sup>2</sup>) [10]: برای سه ماتریس داده شده  $A, B, C$  همواره داریم:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow C \geq 0, A - BC^{-1}B^T \geq 0 \quad (3)$$

لم ۲- [11]: برای هر  $x, y \in R^n$  و  $Z > 0$  با ابعاد مناسب همواره نامساوی ذیل را داریم:

$$2x^T y \leq x^T Z x + y^T Z^{-1} y \quad (4)$$

لم ۳- [12]: در معادله (۱) اگر زوج  $(E, A_0)$  منظم و ضربه آزاد باشند آنگاه همواره زوج ماتریس معکوس پذیر  $M, N \in R^{n \times n}$  وجود خواهند داشت بطوریکه:

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{E}, \quad MA_0 N = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} = \bar{A} \quad (5)$$

و اگر روابط ذیل را در نظر بگیریم:

<sup>2</sup> Schur complement

<sup>1</sup> Computational Fluid Dynamic

خواهیم نمود. این موضوع به این ترتیب خواهد بود که برای دو ماتریس  $K, G \in R^{m \times n}$  مجموعه ذیل را خواهیم داشت:

$$\{D_i K + D_i^T G, i = 1, \dots, 2^m\} \quad (14)$$

$$D_i^T = I_m - D_i, \quad i = 1, \dots, 2^m \quad (15)$$

به عبارت دیگر  $D_i$  برای انتخاب مناسبی از ردیفهای ماتریسهای پسخور حالت  $K$  و  $G$  در نظر گرفته شده است و نقش انتخابگر را ایفا می نمایند. به عنوان مثال اگر تعداد ورودی کنترلی  $m = 2$  باشد آنگاه داریم:

$$\chi = \{D_1, D_2, D_3, D_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

برای ماتریس پسخور کمکی  $G$ ، ناحیه ای از فضای حالت که سیستم کنترلی نسب به  $x$  خطی است به صورت ذیل تعریف می گردد:

$$\Gamma(G) = \{g_i(x) \mid g_i(x) \leq \bar{u}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (16)$$

که در آن  $g_i$  برابر  $\bar{u}$  امین سطر ماتریس  $G$  است و در نتیجه داریم:

$$(Kx(t), \bar{u}) \in co\{D_i K + D_i^T G, \quad i = 1, \dots, 2^m\} \quad (17)$$

حال به دنبال فضایی از زیرمجموعه های  $\Gamma(G)$  خواهیم گشت بطوریکه همواره  $\Gamma(G)$  به صورتی انتخاب می گردد که داشته باشیم:

$$P > 0 \quad \mathcal{E}(P, 1) = \{x : x^T P x \leq 1\}$$

پس با در نظر گرفتن معادلات (17)، (18) و (19)، معادله سیستم حلقه بسته با توجه به روش چند مقوله ای به شکل معادله (18) خواهد بود.

$$\dot{x}(t) - \bar{C}\dot{x}(t - \tau(t)) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \bar{A}_j x(t) + \bar{A}_1 x(t - h(t)), \quad (18)$$

$$x(t) = \phi(t) \quad t \in [-h, 0]$$

بطوریکه:

$$\begin{aligned} \bar{A}_j &= B(D_j K + D_j^T G) + \bar{A}_0, \quad \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \\ \bar{A}_0 &= A_0 + DF(t)E_0, \quad \bar{A}_1 = A_1 + DF(t)E_1 \\ \bar{C} &= C + DF(t)E_2 \end{aligned} \quad (19)$$

به عبارت خیلی خلاصه تر به دنبال ماتریسهای پسخور اصلی و کمکی  $(K, G)$  می باشیم که با استفاده از آنها بتوانیم سیستم معادل سیستم (1) را مجاز و یا معادلش سیستم (17) را پایدار نماییم.

### ۳- بیان قضیه

با توجه به لم ۳، از این پس رویکرد با نگاه به سیستم خنثی معادل یعنی سیستم (17) خواهد بود. در قضیه پیشرو پایدارسازی سیستم خنثی نامعین دارای تاخیر و قید اشباع محرک بررسی خواهد شد.

**قضیه ۱:** اگر ماتریسهای مثبت معین متقارن  $P, Q, R, W$  و همچنین ماتریسهای  $L_i, M_i, i = 1, 2$  با ابعاد متناسب وجود داشته باشد و نامساوی رابطه (20) برقرار باشد، آنگاه سیستم (17) پایدار و متعاقباً سیستم (1) مجاز خواهد بود.

$$MA_d N = \bar{A}_d = \begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{bmatrix}, \quad N^{-1} x(t) = \mu(t) = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

آنگاه سیستم تکین (1) قابل تبدیل به سیستم (17) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - (\bar{C} + \Delta \bar{C}(t))x(t - \tau(t)) \\ = (\hat{A} + \Delta \hat{A})x(t) + (\hat{A}_d + \Delta \hat{A}_d(t))x(t - h(t)) + Bsat(u(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

$$x(t) = \phi(t) \quad t \in [-h, 0]$$

بطوریکه:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_d = \begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ -A_{d3} & -A_{d4} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A_{d3} & -A_{d4} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}(t) = (1 - \hat{h}(t))C$$

$$0 < h(t) \leq h_{\max}, \quad 0 \leq \tau(t) \leq \infty, \quad (9)$$

$$\hat{h}(t) \leq d_1, \quad \hat{\tau}(t) \leq d_2, \quad h_{\max} > 0, \quad d_1 < 1, \quad d_2 < 1$$

در خصوص این لم به راحتی ثابت می گردد که انتخابهای متفاوت  $M, N$  به شرط معکوس پذیر بودن آنها، تاثیری بر نتایج این لم نخواهند داشت. بدین ترتیب بجای بررسی مجاز بودن سیستم (1) می توان پایداری سیستم خنثی (17) را بررسی نمود و برعکس. گفتنی است در نگاه کلی دو سیستم با یکدیگر معادل نمی باشند ولی از منظر پایداری اثبات می گردد رفتار دو سیستم معادل یکدیگر می باشند. به عنوان یکی از فرضهای مساله می بایست مقادیر ویژه  $\bar{C}(t)$  در داخل دایره واحد قرار داشته باشند و یا به عبارت دیگر شرط Schur-Cohn را به صورت  $\rho(\bar{C}(t)) = \max\{\|(1 - d_1)\rho(C)\|, \|(1 - d_2)\rho(C)\|\} < 1$  معمولاً در بسیاری از دینامیکهای فیزیکی محقق است.

در سیستم معادله (17) نایقینیها طبق رابطه ذیل به صورت اندازه-محدود<sup>۱</sup> تعریف می گردد:

$$[\Delta \bar{A}_0(t) \quad \Delta \bar{A}_d(t) \quad \Delta \bar{C}(t)] = DF(t) = [E_0 \quad E_1 \quad E_2] \quad (10)$$

$$F(t) \in R^{i \times j}, \quad F^T(t)F(t) \leq I \quad (11)$$

و ماتریسهای  $D, E_0, E_1, E_2$  ماتریسهای ثابت جهت تبیین نایقینی معادل می باشند. در این مساله کنترلگر را به صورت پسخور استاتیکی حالت که پیاده سازی آن در عمل با مشکل خاصی روبرو نیست، در نظر می گیریم.

$$u(t) = Kx(t) \quad (12)$$

برای ماتریس  $K$  به عنوان قانون کنترلی، ناحیه ای از فضای حالت که با توجه به در نظر گرفتن ورودی کنترلی در سیستم حلقه بسته نسبت به  $x$  خطی است، به صورت ذیل تعریف می گردد:

$$\Gamma(k, \bar{u}) = \{x \in R^n \mid |k_i x| \leq \bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (13)$$

که در آن  $k_i$  برابر  $\bar{u}$  امین سطر ماتریس  $K$  است. قبل از عنوان نمودن قضیه اصلی نیاز است مقدمه ای در خصوص روش اضافه کردن ماتریس پسخور کمکی ارائه گردد [13]. این تکنیک به طور جدی منجر به کاهش محافظه کاری در مواجهه با مساله اشباع محرک خواهد گردید. از این تکنیک به عنوان یکی از ابزارهای اثبات قضیه ادعایی استفاده

<sup>1</sup> Neutral

<sup>2</sup> Norm bounded

که در آن توابع  $u, v: R_+ \rightarrow R_+$  پیوسته و غیر کاهشی می باشند و همچنین  $u(s), v(s)$  برای تمام  $S > 0$  مثبت بوده و  $u(0) = v(0) = 0$  است. درگام بعد می بایست اثبات گردد که مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی در مسیر سیستم کوچکتر از صفر است. لذا داریم:

$$\dot{V}(t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) - (1-\tau(t))\dot{x}^T(t-\tau(t))W\dot{x}(t-\tau(t)) + \dot{x}^T(t)W\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)Q\dot{x}(t) - (1-h(t))\dot{x}^T(t-h(t))Q\dot{x}(t-h(t)) \quad (23)$$

$$+ h_{\max} \dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-h_{\max}}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$$

از معادله  $0 < h(t) \leq h_{\max}$  و همچنین از قبل طبق فرض داشتیم که  $R > 0$  بنابراین:

$$\int_{t-h_{\max}}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \geq \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \Rightarrow - \int_{t-h_{\max}}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \leq - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \quad (24)$$

از سویی دیگر با توجه به فرمول نیوتن-لایبنیتز<sup>4</sup> داریم:

$$0 = x(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t-h(t)) \quad (25)$$

با در نظر گرفتن ماتریسهای  $M_j$   $j = 1, 2$  با ابعاد مناسب خواهیم داشت:

$$2[x^T(t)M_1 + x^T(t-h(t))M_2] \times \dots \underbrace{[x(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds - x(t-h(t))]}_{\approx 0} = 0 \quad (26)$$

با معرفی ماتریس الحاقی  $\zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \end{bmatrix}$  معادله (26) به معادله

(27) تبدیل می شود.

$$0 = 2\zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 & -M_1 \\ M_2 & -M_2 \end{bmatrix} \zeta(t) - 2\zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds \quad (27)$$

مطابق معادله اخیر (27) و لم 2 خواهیم داشت:

$$-2\zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds \leq \quad (28)$$

$$h(t)\zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} R^{-1} [M_1^T \ M_2^T] \zeta(t) + \int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$$

و یا به عبارت دیگر:

$$\int_{t-h(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \leq h(t)\zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} R^{-1} [M_1^T \ M_2^T] \zeta(t) - \quad (29)$$

$$2\zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \int_{t-h(t)}^t \dot{x}(s)ds$$

حال با استفاده از متغیرهای کمکی اضافی  $L_1$  و  $L_2$  که  $L_j$   $(j = 1, 2) \neq 0$  خواهیم داشت:

$$2[x^T(t)L_1 + \dot{x}^T(t)L_2] \times \dots \underbrace{[\sum_{j=1}^{2m} \lambda_j \bar{A}_j x(t) + \bar{A}_1 x(t-h(t)) - \dot{x}(t) + \bar{C}\dot{x}(t-\tau(t))]}_{\approx 0 \text{ close loop Equation (18)}} = 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11(j)} & * & * & * & * \\ \phi_{21(j)} & \phi_{22} & * & * & * \\ \phi_{31(j)} & \phi_{32} & \phi_{33} & * & * \\ \bar{C}^T L_1^T & \bar{C}^T L_2^T & 0 & -(1-d_2)W & * \\ h_{\max} M_1^T & 0 & h_{\max} M_2^T & 0 & -h_{\max} R \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \phi_{11(j)} &= Q + M_1 + M_1^T + L_1 \bar{A}_j + \bar{A}_j^T L_1^T, \\ \phi_{21(j)} &= -L_1^T + L_2 \bar{A}_j + P, \quad \phi_{22} = h_{\max} R + W - L_2 - L_2^T, \\ \phi_{31} &= \bar{A}_1^T L_1^T - M_1^T + M_2^T, \quad \phi_{32} = \bar{A}_1^T L_2^T, \\ \phi_{33} &= -(1-d_1)Q - M_2 - M_2^T. \quad j = 1, \dots, 2^m \end{aligned}$$

قبل از اثبات مشخص است که با یک مساله نامساوی ماتریسی دوخطی<sup>1</sup> روبرو هستیم نه یک مساله نامساوی ماتریسی خطی<sup>2</sup>، لذا در حل می توان دو رویکرد مختلف داشت. پیشنهاد اول تبدیل BMI به LMI از طریق قضایای موجود [14] و یا به عنوان راه حل دوم استفاده از حل کننده های شبه خطی<sup>3</sup> در این خصوص گفتنی است رویکرد اول احتمال اضافه کردن محافظه کاری را دربر دارد و رویکرد دوم با توجه به اینکه یک مساله محدب نیست، تضمینی جهت وجود جواب را برای همه مسائل در بر نخواهد داشت لذا هر کدام از روشها جایگاه ویژه خود را خواهد داشت. با توجه به ابزارهای مختلف پردازشی و الگوریتهای متنوع حل در این فعالیت در اینجا رویکرد دوم انتخاب می شود. دو نمونه از خروجیهای حل این مساله ماتریسهای  $K$  و  $G$  خواهند بود که سیستم (7) را پایدار خواهند نمود.

**اثبات:** روش اثبات مبتنی بر روش لیاپانوف کراسوفسکی بوده و تابعی لیاپانوف ذیل پیشنهاد می گردد:

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{-h_{\max}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta \quad (31)$$

در پاسخ به چگونگی انتخاب این تابعی به شکل معادله (31) می توان اظهار داشت که جمله اول تابع مربعی  $x^T(t)Px(t)$  در تمامی تابعیهای بکارگرفته شده مشترک است و ترمهای انتگرالی جهت وابسته کردن شرایط پایداری به میزان تاخیرات ( دو نوع تاخیر  $h(t)$  و  $\tau(t)$ ) و همچنین نرخهای آنها بکارگیری شده اند. می دانیم به هر اندازه از اطلاعات تاخیر استفاده بیشتری در اثبات و نامساوی حاصله گردد (خود تاخیر، بازه تخمینی آن و نرخهای تغییرات تاخیر)، اندازه محافظه کاری حاصل برای شرایط پایداری حلقه بسته سیستم نیز کمتر می گردد.

با توجه به مثبت معین بودن ماتریسهای  $P, Q, R, W$  کاملا واضح است که تابع پیشنهادی شرط اول روش لیاپانوف-کراسوفسکی را مرتفع می نماید یعنی داریم:

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_C) \quad s.t \quad \|\phi\|_C = \max_{s \in [-h, 0]} |\phi(s)| \quad (32)$$

<sup>1</sup> Bilinear Matrix Inequality

<sup>2</sup> Linear Matrix Inequality

<sup>3</sup> Solvers

<sup>4</sup> Newton-Leibniz

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$|c| < 1, D = I, E_0 = E_1 = \text{diag}\{0.2 \ 0.2\}, E_2 = 0$$

همانطور که مطابق جدول ۲ مشاهده می‌گردد در مثال ۲ نیز شرایط محافظه‌کاری نسبت به سایر مراجع بهتر است. مقادیر داخل جدول بر حسب ثابته است.

جدول ۱- نتایج مثال ۱ و سایر مراجع از دیدگاه تاخیر مجاز

$ c $	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
[15]	1.07	0.92	0.75	0.59	0.46	0.34	0.23	0.12
[16]	1.16	0.96	0.77	0.61	0.47	0.34	0.23	0.13
[17]	1.17	0.96	0.78	0.61	0.47	0.34	0.24	0.13
[18]	1.27	1.03	0.83	0.65	0.49	0.36	0.24	0.13
[19]	1.32	1.07	0.87	0.68	0.51	0.35	0.24	0.14
[20]	1.34	1.08	0.85	0.66	0.66	0.36	0.25	0.13
[21]	1.35	1.11	0.89	0.70	0.53	0.38	0.26	0.13
[22]	2.21	1.71	1.30	0.95	0.67	0.44	0.26	0.14
قضیه	6.63s	4.75	3.19	2.75	2.35	1.35	0.86	0.65

جدول ۲- نتایج مثال و با سایر مراجع از دیدگاه تاخیر مجاز

$ c $	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
[23]	2.39	2.15	1.93	1.74	1.57	1.41	1.26	1.31
[24]	2.40	2.13	1.89	1.68	1.49	1.31	1.16	1.01
[25]	2.44	2.17	1.93	1.72	1.52	1.35	1.19	1.10
[26]	3.13	2.98	2.83	2.66	2.49	2.31	2.12	1.93
[27]	3.45	3.21	3.02	2.88	2.62	2.54	2.51	2.23
[28]	4.00	3.73	3.51	3.00	2.55	2.17	1.84	1.54
قضیه	4.80s	4.37	3.63	3.24	2.95	2.45	2.4	2.00

همانطور که از ردیف انتهایی هر دو جدول ۱ و ۲ مشهود است به ازای مقادیر مختلف  $c$ ، که هر کدام بیانگر یک سیستم جدید و دینامیک متفاوت است، تکنیک ارائه شده برتری محسوس را در خصوص کاهش محافظه‌کاری در کنار سایر قیود مساله در کلیه دینامیکها داشته است.

**مثال ۳-** سیستم تکین (۱) با ماتریسهای ذیل را در نظر بگیرید:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta A_0 = \Delta A_d = d_1 = B = 0$$

بر اساس تعریف ۲ و مشخص است که سیستم منظم و ضربه آزاد است. بر اساس لم ۳ دو ماتریس معکوس پذیر  $M$  و  $N$  را به دلخواه و ترتیب ذیل انتخاب می‌کنیم و سیستم را در فرمت خنثی و فرم جدید خواهیم داشت:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MEN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, MAN = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, MA_d N = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بر اساس روش تحلیلی (فرکانسی) و مرجع [8] نتیجه حداکثر تاخیر مجاز برابر  $h_{\max} = 1.2092s$  بوده و تاخیر مجاز مطابق روش این مقاله برابر  $1.1547$  ثانیه است که حدود  $95.49\%$  از مقدار تحلیلی را پوشش داده و بسیار نزدیک به آن است.

**مثال ۴-** مشابه مثال ۳ سیستم ذیل را در نظر بگیرید که در آن اشباع عملکرد نیز در نظر گرفته شده است:

در اینجا معادله (۳۰) را که مقداری معادل صفر دارد را به سمت راست معادله (۲۳) اضافه می‌کنیم در ادامه با استفاده از معادله (۲۴) و جایگزینی معادله (۲۹) در معادله (۲۳)، معادله (۲۳) یا همان معادله مشتق تابع لیاپانوف به صورت ذیل تغییر می‌یابد:

$$\dot{V}(t) \leq 2x^T(t)Px(t) + h_{\max} \dot{x}^T(t)Rx(t) -$$

$$(1-d_1)x^T(t-h(t))Qx(t-h(t)) + x^T(t)Qx(t) +$$

$$(1-d_2)\dot{x}^T(t-\tau(t))W\dot{x}(t-\tau(t)) + \dot{x}^T(t)W\dot{x}(t) +$$

$$2[x^T(t)L_1 + \dot{x}^T(t)L_2] \times [\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j \bar{A}_j x(t) +$$

$$(31) \quad \bar{A}_1 x(t-h(t)) - \dot{x}(t) + \bar{C}\dot{x}(t-\tau(t))] +$$

$$2\zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 & -M_1 \\ M_2 & -M_2 \end{bmatrix} (t) +$$

$$h_{\max} \zeta^T(t) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} R^{-1} [M_1^T \ M_2^T] \zeta(t)$$

اکنون با معرفی بردار حالت الحاقی  $\xi^T(t)$  و ماتریس  $\psi$  داریم:

$$\xi^T(t) = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t-h(t)) \ \dot{x}^T(t-\tau(t))] \quad (32)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi_{11(j)} & * & * & * \\ \phi_{21(j)} & \phi_{22} & * & * \\ \phi_{31(j)} & \phi_{32} & \phi_{33} & * \\ \bar{C}^T L_1^T & \bar{C}^T L_2^T & 0 & -(1-d_2)W \end{bmatrix} \quad (33)$$

معادله (۳۱) می‌تواند به شکل معادله ۳۴ خلاصه گردد.

$$h_{\max} \xi^T(t) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} R^{-1} [M_1^T \ M_2^T] \xi(t) + \xi^T \psi \xi^T < 0 \quad (34)$$

با مقایسه معادله (۳۴) و لم مکمل شور (لم ۱) می‌توان به این نتیجه رسید که در صورتی که معادله (۲۰) منفی معین باشد قضیه اثبات گردیده است. بدین ترتیب اثبات قضیه نهایی است.

### ۳-۱- نتایج شبیه سازی عددی و مقایسه از منظر محافظه

#### کاری با سایر مراجع

**مثال ۱-** سیستم خنثی با معادله ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) - (\bar{C} + \Delta\hat{C}(t))\dot{x}(t-\tau(t)) =$$

$$(35) \quad (\hat{A}_0 + \Delta\hat{A}_0)x(t) + (\hat{A}_d + \Delta\hat{A}_d(t))x(t-h(t))$$

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, 0 \leq c \leq 1$$

و نایقینی‌ها مطابق معادله (۱۰) به شکل ذیل است:

$$D = I, E_0 = \text{diag}\{1.6 \ 0.05\}, E_1 = \text{diag}\{0.1 \ 0.3\}, E_2 = 0$$

همانطور که از نتایج جدول ۱ مشهود است نتایج محافظه‌کاری در مقایسه با سایر مراجع دارای شرایط بسیار مطلوبتری است. این برتری در خصوص سیستم دیگری در مثال ۲ دیده می‌شود.

**مثال ۲-** سیستم معادله (۳۵) را در نظر بگیرید بطوریکه ماتریسهای اصلی سیستم عبارتند از:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{C} = d_1 = d_2 = 0, \bar{u}_i = 5$$

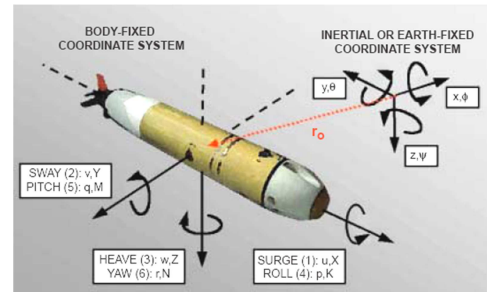
جدول ۳- نتایج مثال ۴ و سایر مراجع معتبر

مرجع	$h_{max}$ (s)	$K$
[29]	2.248	گزارش نشده
[30]	2	[-5.7702 -0.9754]
[31]	1.854	[-1.7008 0.2776]
[32]	3.310	[-605.9023 -401.8906]
قضیه	3.3153	[-261.7116 -172.8281]

نتایج جدول ۳ اختلاف مشهود و برتری روش را با اکثر روشهای رایج شده نشان داده است. در این مثال بر خلاف مثالهای قبلی قید اشباع عملگر و بردار ورودی نیز در نظر گرفته شده است و همانطور که مشاهده می‌گردد دوباره سیستم در شرایط جدید در مقایسه با سایر مراجع عملکرد مطلوبتری از منظر محافظه‌کاری داشته است و به عبارت دیگر حداکثر زمان تاخیر بیشتری را تحمل می‌نماید.

#### ۴- مدل تکین ربات خودگردان زیرسطحی

مدلسازی یک وسیله زیر آبی خودگردان مشمول بررسی نیروهای استاتیکی و دینامیک آن است. بحث استاتیکی مربوط به تعادل جسم در حرکت با سرعت ثابت و بحث دینامیک مربوط به حرکت شتاب‌دار آن وسیله می‌شود. به صورت کلی و خلاصه، دستگاه‌های مختصات مورد استفاده در ناوبری یک جسم شش درجه آزادی دو دستگاه مختصات متصل به زمین<sup>۱</sup> و دستگاه مختصات بدنی<sup>۲</sup> (متصل به جسم) است. برای یک شناور زیرسطحی خودگردان استخراج معادلات حرکت در سیستم مختصات بدنه مطلوبتر است زیرا نیروها و گشتاورهای هیدرودینامیکی و هیدرواستاتیکی به راحتی در این سیستم مختصات بیان می‌شوند. بنابراین عموماً برای استخراج مدل ربات زیرسطحی خودگردان از فرمول‌بندی نیوتنی استفاده می‌شود نه لاگرانژی (اختلاف انرژی جنبشی و پتانسیل). به صورت کلی و عمومی یک ربات در زیر آب دارای ۶ درجه آزادی است. بنابراین ۶ مختصات مستقل برای تعیین موقعیت و جهت جسم مورد نیاز است. مطابق شکل ۲، سه مختصه اول و مشتقات زمانی آنها برای موقعیت و حرکت خطی و سه مختصه آخر و مشتقات زمانی آنها بیان کننده حرکت و جهت زاویه‌ای بکار برده می‌شود.



شکل ۲- حرکت شش درجه آزادی و دستگاه‌های مختصات

نام حرکات، علائم نیروهای اعمالی، سرعت و موقعیت هر حرکت در ادامه آمده است.

$$\eta_1 = [x \ y \ z]^T \text{ Positions, } \eta_2 = [\phi \ \theta \ \psi]^T \text{ Euler angles}$$

$$v_1 = [u \ v \ w]^T \text{ Linear velocities, } v_2 = [p \ q \ r]^T \text{ Angular velocities}$$

$$\tau_1 = [X \ Y \ Z]^T \text{ External forces, } \tau_2 = [K \ M \ N]^T \text{ External moments}$$

استخراج کامل مدل شش درجه آزادی در فضای حالت برای ربات خودگردان زیرآبی در مقالات قبلی محققین به تشریح صورت گرفته و دو نوع کنترلگر نوین تطبیقی- فازی [33] و مرتبه کسری- فازی [34] در آنها بکارگیری شده است لذا در این مقاله صرفاً معطوف به استخراج مدل تکین در ساده‌ترین فرم ممکن می‌باشیم. مدل در نظر گرفته شده برای انتخاب AUV با توجه به محدودیتهای جدی در خصوص دسترسی مدل، REMUS100<sup>۳</sup> بوده که به عنوان مرجعی معتبر در مقالات علمی مورد استفاده قرار می‌گیرد. کلیه ضرایب هیدرودینامیکی و فرضیات استاتیکی و دینامیکی آن نیز مطابق مرجع [7] است. با توجه به تقارن این وسیله و سرعت پایین کاری می‌توان دو صفحه اصلی افقی و قائم را مجزا دانست و با توجه به مشابهت و اهمیت بیشتر تمرکز بر روی کانال عمق صورت می‌گیرد. در این کانال پارامترهای  $p, q, u, v, w, Z, M$  مورد استفاده خواهند بود. با توجه به امکان تفکیک دو صفحه افقی و قائم در سرعتهای معمول و پایین، برای حرکت در صفحه قائم صرفاً نیاز به معادلات حرکت Pitch و Heave وجود دارد. بنابراین برای کنترل آن نیز یک عملگر در نظر می‌گیریم. در این مرحله سه پارامتر جدید  $\xi_r, \xi_p, \xi_e$  را که به ترتیب از چپ مبین عمق فعلی، عمق دلخواه و خطای عمق هستند تعریف می‌گردند. حال مطابق روابط ذیل برای پارامتر Heave داریم:

$$\text{Heave:}$$

$$m[\dot{\omega} - uq + vp - z_g(p^2 + q^2) + x_g(\dot{p} - q) + y_g(\dot{p} + \dot{q})] =$$

$$0.5\rho L^4(Z_{\dot{q}}\dot{q} + Z_{pp}p^2 + Z_{q|q}|q| + Z_{\dot{p}}\dot{p}) \quad (36)$$

$$+ 0.5\rho L^3(Z_{\dot{\omega}}\dot{\omega} + Z_{vp}vp + Z_{\omega|q}|q| + Z_{uq}uq)$$

$$+ 0.5\rho L^2(Z_{uu}u^2 + Z_{uv}uv + Z_{\omega\dot{\omega}}|\dot{\omega}|)$$

$$+ 0.5\rho L^2 Z_{\delta_s} u^2 \delta_s + (W - B) \cos \theta \cos \phi$$

همچنین در پارامتر  $Pitch(\theta)$  به عنوان یکی دیگر از پارامترهای مهم کانال عمق داریم:

$$\text{Trim(Pitch):}$$

$$I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp + m[z_g(\dot{u} + \dot{\omega}q - vr) - x_g(\dot{\omega} + vp - uq)] =$$

$$0.5\rho L^5[M_{\dot{q}}\dot{q} + M_{pp}p^2 + M_{rr}r^2 + M_{rp}rp + M_{q|q}|q|] \quad (37)$$

$$+ 0.5\rho L^4[M_{\dot{\omega}}\dot{\omega} + M_{vr}vr + M_{vp}vp + M_{uq}uq + M_{w|q}|q|]$$

$$+ 0.5\rho L^3[M_{uu}u^2 + M_{uv}uv + M_{\omega\dot{\omega}}|\dot{\omega}|]$$

$$+ 0.5\rho L^3 M_{\delta_s} u^2 \delta_s + Z_B B \sin(\theta)$$

می‌توانیم مشتق مشتق عمق را طبق تعریف عمومی مشتق برابر معادله (۳۸) تعریف نماییم.

$$\dot{\xi}_e = \frac{d(\xi_r - \xi_p)}{dt} = -\dot{\xi}_p \quad (38)$$

از طرفی قابل تعریف و محاسبه است که:

<sup>1</sup> Earth-fixed frame

<sup>2</sup> Body-fixed frame

<sup>3</sup> Remote Environmental Monitoring Units

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} -1.9589 & 2.9991 & -1.1485 & 2.8776 \\ 0.1171 & -0.3628 & 1.0685 & 0.0115 \\ -0.1809 & 0.0520 & -0.2069 & 0.4908 \\ -1.907 & 1.888 & -1.2651 & 1.3833 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -14.585 \\ -14.585 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.054 & -0.001 & 0.02 & 0 \\ -0.015 & 0.01 & 0.001 & 0.03 \end{bmatrix}, \hat{A}_d = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & -0.39 & 0.1 \\ 0.5 & -0.2 & 0.68 & 0.3 \\ -0.054 & -0.001 & 0.02 & 0 \\ -0.015 & 0.01 & 0.001 & 0.03 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

## ۵- شبیه سازی ربات خودگردان در کانال عمق

در شبیه سازیهای پیشرو برای متغیر بودن نایقینیا تابع تغییردهنده زمانی را به صورت  $F(t) = \cos(t)$  در نظر می‌گیریم (برآورده کردن الزام معادله (۱)). همچنین توابع پیوسته اولیه تاخیر را به صورت توابعی پیوسته دلخواه مانند  $\sin(t), \cos(t), \exp(t)$  در نظر می‌گیریم. انتظار می‌رود در این شبیه‌سازی‌ها با قیدهای اشباع عملگرها، نایقینیا، تاخیر با نرخ متغیر و حساسیتهای سیستم خنثی پایداری با حداقل محافظه‌کاری را برای هر چهار حالت سیستم داشته باشیم. جهت تحلیل بهتر، نمایش تلاش کنترلی نیز در ادامه آمده است. در شبیه سازها از نرم افزار Matlab نسخه ۲۰۱۶ و بسته YALMIP و حل کننده Penlab استفاده گردیده است و زمانها بر حسب ثانیه است. شبیه سازی شماره ۱ ربات - در این مثال بررسی حداکثر خطای مجاز ربات خودگردان و بررسی اثر محدودیت دامنه عملگر بر روی این میزان مطابق جدول ۴ بررسی شده است. در این مثال نایقینی به شکل فرضی ذیل در نظر گرفته می‌شود:

$$D=[0.4;0.2;0;0.2]; E0=[1 \ 0 \ 1 \ 1];$$

$$E1=[0.3 \ 0.6 \ 0.3 \ 1]; E2=[1 \ 0.4 \ 2 \ 1] \ \& \ (d_1 = d_2 = 0)$$

جدول ۴- وابستگی حداکثر تاخیر مجاز به محدودیت عملگر

$\bar{u}^\circ$	2	4	5	8	12	15,20
$h_{\max}$	1.76	1.78	1.79	1.89	2.04	2.04

همانطور که از جدول ۴ مشهود است با کاهش محدودیت قید عملگر (بالا رفتن زاویه آزادی  $\bar{u}$ ) میزان حداکثر مجاز تاخیر جهت مجاز بودن سیستم بالا رفته ولی از یک میزان به بعد این افزایش زاویه بی تاثیر است. به عبارت دیگر تا حدی کاهش محدودیت عملگر منجر به جبران بخشی از اثرات نامطلوب تاخیر شده است.

شبیه‌سازی شماره‌های ۲ و ۳ ربات - در این شبیه‌سازیها وضعیت مدیریت سیستم در حالت وجود نایقینی و بدون نایقینی بررسی می‌گردد. سیستم مدنظر ربات مطابق معادله (۴۳) با شرایط ذیل است. در حالت اول (شکل‌های ۳ و ۴) مربوط به حالات و تلاش کنترلی سیستم در حالت یقین و شکل‌های ۵ و ۶ مربوط به سیستم در حالت با نایقینی است. نایقینی‌ها به قرار ذیل است:

$$\dot{\theta} = q \cos \theta - r \sin \phi \quad (39)$$

$$\dot{\xi} = -u \sin \theta + v \cos \theta \sin \phi + \omega \cos \theta \cos \phi \quad (40)$$

حال با تعریف نقطه کاری<sup>۱</sup> به صورت  $u_0 = 1.54 \text{ m/s}$  یا دور 1500RPM

$$\zeta_e \equiv 0 \quad \theta = \omega = q = \zeta_e \equiv 0$$

مدل معادله (۴۱) را خواهیم داشت که ورودی  $x(t) = [\zeta_e \ \omega \ q \ \theta]^T$  در آن برابر ورودی سکان استرن<sup>۲</sup> یا همان  $\delta_s$  خواهد بود.

$$\dot{E}x^*(t) = Ax^*(t) + Bu(t) + D^* \quad (41)$$

در اینجا  $D^*$  خطای ساده‌سازی و خطی‌سازی است که مقداری کم اهمیتی است. مقادیر ماتریسهای اصلی با توجه به مقادیر ضرایب نمونه REMUS100 از [7] به قرار ذیل خواهند شد:

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65.98 & 1.93 & 0 \\ 0 & 1.93 & 8.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.3 & -16.5 & -1.7 & -0.15 \\ -0.24 & -21.28 & -1.7 & -0.30 \\ -1.5 & -10.5 & -9.8 & -1.47 \\ 0.86 & 5.7 & 5.1 & 0.78 \end{bmatrix}, \\ A_s &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1.54 \\ 0 & -44.04 & -8.04 & 0 \\ 0 & 36.96 & -3.08 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -14.585 \\ -14.585 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

در این خصوص گفتنی است  $\text{rank } E = 4$  بوده و در صورت نایقینی در درایه اول و آخر ( $E_{11}$  یا  $E_{44}$ ) و یا با ورود اغتشاش با این دامنه سیستم در مد تکین قرار خواهد گرفت. همچنین دستیابی به ماتریس  $A_d$  نیاز به مراحل شناسایی سیستم خواهد داشت که خارج از حوزه مطالعه این مقاله است.

مدل رباتهای زیرسطحی نسبت به عوامل مختلفی تغییر می‌کند. تغییر سرعت ربات، تغییر مشخصه‌های سیال اطراف (چگالی)، تنظیم نبودن مرکز ثقل، تغییر در وزن وسیله به دلیل پر و خالی شدن مخازن غوص و صعود یا حمل تجهیزات جانبی، نزدیکی سناریوی حرکتی به زوایای ممنوعه اوپلری ( $\pm 90^\circ$  درجه) در اغتشاشات آبی، از جمله عواملی است که در مدل شناور تأثیرگذار است. این عوامل می‌توانند باعث تغییر در ماتریس اینرسی جسم صلب ( $M_{RB}$ )، ماتریس کریولیس<sup>۳</sup> ( $C_{RB}$ ) (ماتریس مرکزگرا) و ماتریس میرایی هیدرودینامیک گردند و در معادلات اصلی این ماتریسها را معکوس ناپذیر نمایند و باعث غیر معتبر گردیدن مدل فضای حالت شوند و سیستم را در مد تکین وارد نمایند. با توجه به تعاریف ۱ و ۲ مشخص است که سیستم منظم و ضربه آزاد است. حال با در نظر گرفتن دو ماتریس معکوس پذیر  $M$  و  $N$  سیستم در فرم تکین برابر فرم ذیل خواهد بود:

<sup>1</sup> Trim point

<sup>2</sup> Stem

<sup>3</sup> Coriolis



شکل ۴ بوده که آن هم بیانگر انرژی بیشتر جهت غلبه بر عدم قطعیت پارامتری است. با وجود تمام قیود مشاهده می‌شود در هر دو سناریو سیستم پایداری مطلوب را دارا است و ضرایب کنترلی بدرستی کنترل سیستم را در دست گرفته‌اند.

### ۶- نتیجه گیری و فعالیت آینده

در این مقاله روشی جدید برای کنترل سیستم‌های تکین دارای قید اشباع عملگر با در نظر گرفتن مساله تاخیر و ناپیچینی متغیر با زمان ارائه شد. با توجه به تکنیک استفاده شده، این روش دربرگیرنده سیستم‌های خنثی که دارای محدودیتها و حساسیت‌های خاص کنترلی نیز هستند، می‌باشد. پرهیز از کنترلگر پیچیده و قابل پیاده سازی راحت از شاخصها و الزامات اصلی طراحی مدنظر بوده است. براساس قضیه ارائه شده از طریق نامساویهای شبه خطی، پایداری سیستم حلقه بسته تضمین گردید. با توجه به اهمیت مساله محافظه‌کاری در سیستم‌های تاخیری، نگاهی ویژه به این موضوع شده و مقایسه نتایج روش جدید با مراجع معتبر انجام شد. از ویژگی‌های بارز تکنیک ارائه شده پرهیز از ریاضیات و ادبیات پیچیده سیستم‌های تکین بوده است. نظریه عنوان شده به راحتی قابل گسترش به سیستم‌های چند تاخیری حالت نیز می‌باشد. در انتها، مدلی تکین از یک ربات خود گردان زیرآبی استخراج شد و توانایی روش ارائه شده بر روی این AUV در دو سناریوی مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت. نتیجه حاصل از شبیه سازیها موید عملکرد مناسب این تکنیک است. امید است روش مذکور پنجره‌ای جدید در کنترل سایر سیستم‌های دینامیکی تکین و مشابه نظیر UAV<sup>۳</sup>ها باشد. محققین این مقاله در صدد خواهند بود در آینده، بررسی موضوع را در سیستم‌های گسسته زمان سوئیچینگ ادامه دهند.

### ۷- نمادها

*	درایه‌های متقارن در یک ماتریس متقارن
$col \{ \dots \}$	بردار ستونی
$diag \{ \dots \}$	ماتریس قطری بلوکی
$P > 0$ ( $P \geq 0$ )	ماتریس مثبت معین (نیمه معین مثبت) و متقارن.
$R^{m \times n}$	ماتریسهای حقیقی با ابعاد $n \times m$
$sym \{ \cdot \}$	$Sym \{ X \} = X + X^T$
$T$	ماتریس ترانپوز
$\rho$	شعاع طیفی ماتریس
$   \cdot   $	دترمینال

### ۸- مراجع

- [1] Lei M., "Non-linear diving stability and control for an AUV via singular perturbation," *Ocean Engineering*, Vol. 197, p. 11, 1 Feb 2020.
- [2] Refsnes J. E.G., *Nonlinear Model-Based Control of Slender Body AUVs*, J. E. G. Refsnes, Ed., Norwegian University of Science and Technology, 2007.
- [3] Chen W. H., Zheng W. X., and Lu X., Impulsive stabilization of a class of singular systems with timedelays, *Automatica*, Vol. 83, No. 9, pp. 28-36, September 2017.
- [4] Binazadeh T., Jafari E., Modified composite nonlinear

$$D=[0.4, 0.2, 0, 0.2], E_0=[1 \ 0 \ 1 \ 1], E_1=[0.3 \ 0.6 \ 0.3 \ 0.3];$$

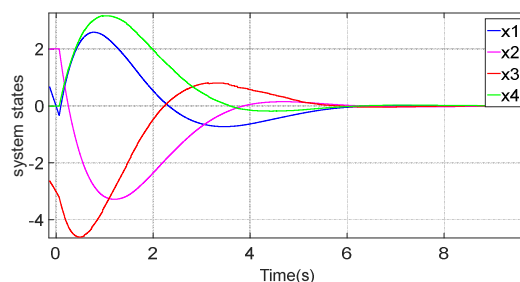
$$E_2=[1 \ 0.4 \ 2 \ 1], (d_1 = d_2 = 0.25), \bar{u} = 1, h(t) = \tau(t) \leq 0.2s$$

ضرایب کنترلگر و اندازه تلاش کنترلی بر مبنای معیار IAE<sup>۱</sup> برای حالت بدون ناپیچینی برابر است با:

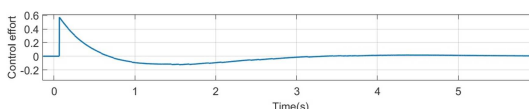
$$K_1 = [-0.0683 \ 0.2725 \ -0.0021 \ 0.2955], |Control\ effort| = 0.0110$$

این ضرایب و تلاش کنترلی برای حالت با ناپیچینی عبارتند از:

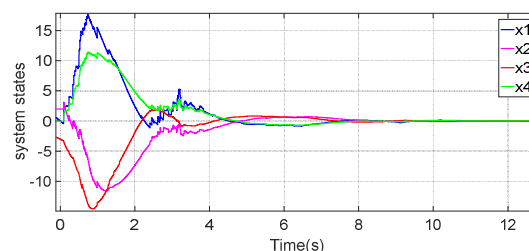
$$K_2 = [-0.0468 \ 0.3037 \ 0.0026 \ 0.3641], |Control\ effort| = 0.2541$$



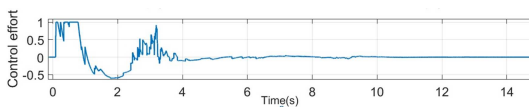
شکل ۳- پایداری حالات همراه تاخیر متغیر با زمان و قید اشباع عملگر



شکل ۴- تلاش کنترلی همراه تاخیر متغیر با زمان و قید اشباع عملگر



شکل ۵- پایداری کلیه حالات با وجود ناپیچینی



شکل ۶- تلاش کنترلی با وجود ناپیچینی و سایر قیود

مطابق شبیه سازی انجام شده AUV با توجه به محدودیت در قید اشباع عملگر، تاخیر متغیر بازمان، محدودیت سیستم خنثی و ناپیچینی در پارامترها در هر دو سناریو در هر چهار حالت به پایداری مناسبی رسیده است. همانطور که در شکل ۶ نیز مشاهده گردیده است ورودی کنترلی با رعایت قید اشباع ۱درجه لحاظ شده است. زمان رسیدن به حالت پایدار<sup>۲</sup> در شکل ۳ نسبت به شکل ۵ کمتر و مطلوبتر بوده و دلیل آن نیز از همان عدم قطعیت نشات می‌گیرد که در سناریوی دوم اضافه گردیده است. این موضوع در خصوص حداکثر جهش نیز در شکل ۳ و ۵ مشهود است. تلاش کنترلی با رعایت قید اشباع در شکل ۶ بیشتر از

<sup>1</sup> Integral of Absolute Error

<sup>2</sup> Settling time

<sup>3</sup> Unmanned Aerial Vehicles

- criteria for time-delaysystems, *IEEE Trans Autom Control*, Vol. 50, No. 3, pp. 384-7, 2005.
- [24] Liu P-L., Stability criteria for neutral uncertain systems with time-varying delays, *Proc Inst Mech Eng I J Syst Control Eng*, Vol. 244, No. 4, pp. 339-48, 2010.
- [25] Qian W., Liu J., Sun Y. and Fei S., A less conservative robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays, *Math Comput Simul*, Vol. 80, No. 5, pp. 1007-17, 2010.
- [26] Han QL., On stability of linear neutral systems with mixed time delays:a discretized Lyapunov functional approach, *Automatica*, Vol. 41, No. 7, pp. 1209-18, 2005.
- [27] Liu. Y. and Li. M., New stability analysis for systems with interval time-varying delay via a delay-fractioning approach, *Int J Control Autom*, Vol. 7, No. 4, pp. 9-18, 2014.
- [28] Liu P-L., Improved delay-dependent robust stability criteria for neutral uncertain systems with time-varying delay, *Int J Electr Eng*, Vol. 21, No. 1, pp. 1-11, 2014.
- [29] Zhang L., Boukas E.-K. and Haidar A., Delay-range-dependent control synthesis for time-delay systems with actuator saturation, *Automatica*, Vol. 44, No. 10, 2008.
- [30] Haoussi F. and Tissire H., Delay and its time-derivative dependent robust stability of uncertain neutral systems with saturating actuators, *International Journal of Automation and Computing*, Vol. 7, pp. 455- 462, 2010.
- [31] Delgado E., Diaz-Cacho M. and Barre A., Stability of Teleoperation Systems for Time-Varying Delays by Neutral LMI Techniques, *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- [32] Ghosh R. D. S. and Raksh G. R. A., Improved delay-dependent stabilization of time-delay systems, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 24, No. 5, pp. 902-917, 2014.
- [33] Khodayari M. H. and Balochian S., Modeling and control of autonomous underwater vehicle (AUV) in heading and depth attitude via self-adaptive fuzzy PID controller, *Journal of Marine Science and echnology*, Vol. 20, pp. 559-578, 2015.
- [34] Khodayari M. H. and Balochian S., "Design of adaptive Fuzzy Fractional Order PID controller for autonomous underwater vehicle (AUV) in heading and depth attitudes," *Trans RINA, Intl J Maritime Eng*, Vol. 158, pp. 18, Jan-Mar 2016.
- feedback control for output tracking of nonstep signals in singular systems with actuator saturation, *Int Robust Nonlinear Control*, pp. 1-15, July 2018.
- [5] Gonzalez A., Castillo A., Garcia P., Albertos P., Robust Stabilization of Time-varying delay system with predictor observer based controller, *IFAC*, Vol. 52, No. 1, pp. 213-218, 2 July 2019.
- [6] Binazadeh T., Gholami H., Sliding-mode observer design and finite-time control of one-sided Lipschitz nonlinear systems with time-delay, *Lipschitz nonlinear systems with time-delay*, 13 June 2018.
- [7] Prestero T., *Verification of a Six-Degree-of-Freedom Simulation Model for the REMUS Autonomous Underwater Vehicle*, Massachusetts: Massachusetts, 2001.
- [8] Fridman E., "Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 273, pp. 24-44, 2002.
- [9] Li S., Lin H., stability of switched positive singular systems with time-varying delay, *Int J Robust Non-linear Control*, Vol. 27, No. 16, pp. 2798-2812, 08 Nov 2017.
- [10] Caverly R. J., Forbes J. R., LMI Properties and Applications in Systems, Stability, and Control Theory, 2019.
- [11] Cao Y. Y., Sun Y.-X., Cheng C., Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays,," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 11, pp. 1608-1612, 1998.
- [12] Liu Z. Y., Lin C. and Chen B., Admissibility analysis for linear singular systems with time varying delays via neutral system approach, *ISA Transaction*, 2016.
- [13] Cao Y. Y., Sun Y. X. and Chen C., Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, pp. 1608-1612, Nov 1998.
- [14] Gritli H., Zemouche A. and Belghith S., On LMI conditions to design robust static output feedback controller for continuous-time linear systems subject to norm-bounded uncertainties, *International Journal of system science*, Vol. 51, No. 14, 11 Sep 2020.
- [15] Qui F., Cui B. and Ji Y., Further results on robust stability of neutral system with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations, *Nonlinear Anal Real World Appl*, P.Vol. 11, No. 2, pp. 895-906, April 2010.
- [16] Yu K. W. and Lien C. H., Stability criteria for uncertain neutral systems with interval, *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 38, No. 3, pp. 650-657, 2008.
- [17] Guo L., Gu H. and Zhang D., Robust stability criteria for uncertain neutral system with interval time varying discrete delay, *Asian Journal of Control*, Vol. 12, No. 6, pp. 739-745, 2010.
- [18] Ramakrishnan K. and Ray G., An improved delay-dependent stability criterion for neutral systems with mixed time-delays and nonlinear perturbations, in *annual IEEE India conference INDICON*, Kolkata, 2010.
- [19] Rakkiappan R., Balasubramaniam P. and Krishnaswamy R., Delay-dependent stability analysis of neutral system with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations, *Comput Appl Math*, Vol. 235, pp. 2147-56, 2010.
- [20] Ramakrishnan K. and Ray G., An improved delay-dependent robust stability criterion for uncertain neutral systems with time-varying delays, *Commun Comput Inf Sci*, Vol. 140, 2011.
- [21] Lakshmanan S., Senthilkuma T. and Balasubramaniam P., Improved results on robust stability of neutral systems with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations, *Appl Math Model*, Vol. 35, pp. 5355-68, 2011.
- [22] Liu P-L., Improved delay-range-dependent robust stability for uncertain systems with interval time-varying delay, *ISA Transaction*, Vol. 53, No. 6, pp. 1731-1738, 2014.
- [23] Xu S. and Lam J., Improved delay-dependent stability